MaMaEuSch

Management **Ma**thematics for **Eu**ropean **Sch**ools
http://www.mathematik.uni-kl.de/~mamaeusch/

Evaluación de opciones

Elke Korn

Ralf Korn[1]

Esta publicación es una parte del libro “Matemática y Economía“ que es apoyado por la Bertelsmann Stiftung.

El Proyecto MaMaEuSch es publicado con el apoyo de la Comunidad Europea en el marco del programa Sócrates.
El contenido del proyecto no refleja necesariamente el punto de vista de la Comunidad Europea y no está sujeto a ninguna responsabilidad por parte de la Comunidad Europea.

[1] Universidad Técnica de Kaiserslautern, Departamento de Matemática, Matemáticas Financieras

Capítulo 6: Evaluación de opciones

Contenido

Conceptos de Economía:
- Contratos spot: futuros y forwards
- Opciones
- Derivados
- Principio de la réplica
- Tasar dinero
- Mercados completos
- Valoración de riesgo-neutral

Conceptos de la matemática escolar:
- Solución de sistemas de ecuaciones
- Matrices y vectores
- Demostración por inducción
- Distribución binomial
- Distribución normal
- Teorema de de Moivre-Laplace
- Simulación de Monte-Carlo

Contenido
- 6.1 Opciones – características de los mercados financieros modernos
- 6.2 A fondo: opciones – conceptos, bases e historia
- 6.3 Conversación: Alta motivación – opciones como pagos orientados a la remuneración
- 6.4 Continuación de la conversación: así o así – el principio de la réplica
- 6.5 Fundamentos matemáticos: principios de la evaluación de opciones
- 6.6 Fundamentos matemáticos: el precio de las opciones en el modelo binomial
- 6.7 Continuación de la conversación: evaluación de opciones en todo momento
- 6.8 Fundamentos matemáticos: la fórmula Black-Scholes para calls y puts europeos
- 6.9 Fundamentos matemáticos: simulación de precios de opciones con ayuda de métodos de Monte-Carlo, en especial para opciones exóticas
- 6.10 Resumen

Manual para el Capítulo 6

El objetivo principal de este capítulo consiste en una introducción a los conceptos generales del manejo de **opciones** y del **principio de la réplica** para la **evaluación de opciones** en **mercados completos**. Prestaremos especial atención a la comprensión del principio de la réplica (“formación continua de corrientes de pago“) y a la **evaluación neutral al riesgo** resultante. Esto es en gran parte debido a que a simple vista las conclusiones parecieran contradecirse. En las secciones 6.1 y 6.2 se dará Información adicional sobre el concepto y la historia de las opciones. En la sección 6.3 se presentaran posibles aplicaciones de diferentes tipos de opciones mediante la primera conversación de los Consultores-Inteligentes. En la siguiente conversación, la de la sección 6.4, se introducirán los conceptos necesarios para el

conversación, la de la sección 6.4, se introducirán los conceptos necesarios para el principio de la réplica en la evaluación de opciones.
Las secciones 6.5 y 6.6 tratarán los fundamentos matemáticos de la evaluación de opciones. En la primera de estas dos secciones se definirá en forma matemática una opción y el principio de la réplica. Ambas definiciones serán posteriormente aplicadas, en la siguiente sección, para poder deducir fórmulas cerradas para la determinación de los precios de las opciones. Gracias a estas fórmulas se fundamenta el concepto de la evaluación neutral al riesgo. Los únicos conceptos matemáticos requeridos son: conocer los valores esperados y la solución para sistemas de ecuaciones, por lo general de dos ecuaciones y dos incógnitas. Para comprender el principio de la réplica es necesario el concepto de arbitraje, el cual a su vez será presentado en este capítulo. Si uno desea obviar modelos de mercados complejos, entonces tanto las secciones 6.5 y 6.6 serán suficientes para una introducción a la evaluación de opciones.
En la sección 6.7 se llevará a cabo la tercera conversación y en la sección 6.8, se introducirá una forma heurística de la aplicación de la fórmula Black-Scholes, para la evaluación de opciones call y put europeos. Esta fórmula fue merecedora del premio Nóbel. Para ello, será necesario entender tanto el modelo de Black-Scholes, así como el Teorema de de Moivre-Laplace los cuales serán presentados en este capítulo. Para la parte de la conversación, bastará con la comprensión de las conversaciones previas.
En la sección 6.9 serán tratadas otras opciones exóticas y una metodología popular para calcular sus precios, como lo es la simulación por métodos de Monte-Carlo. Mientras que la presentación de las opciones exóticas sirve mayoritariamente para comprender el manejo de derivados, la metodología de Monte-Carlo es una herramienta que posee un interés particular. Esto es debido a que muestra la aplicabilidad de ordenadores en la matemática financiera.

6.1 Opciones – características de los mercados financieros modernos

El cambio en los mercados financieros

Dejando a un lado el hecho de que los corredores de bolsa ya no gritan por los pasillos de la Bolsa de valores, sino que siguen el curso de las acciones sin hacer ruido desde el monitor de sus ordenadores, la cultura de la bolsa actual se diferencia en muchos otros puntos de la de hace 50 años. Aún cuando el ambiente en las bolsas de hoy en día transmite paz y tranquilidad, el número de transacciones, no sólo en acciones, ha aumentado notablemente en los últimos años. Una característica típica de los mercados modernos son las transacciones con **derivados** de diferentes estructuras. Los derivados son instrumentos financieros respaldados por un valor base como por ejemplo una acción, un bono, un activo o una materia prima y que por consiguiente su valor depende de éste. Es así como existen por ejemplo certificados sobre cacao o aluminio, valores con los que es posible asegurar el precio de una acción o también comprar un seguro ante préstamos vencidos. Los derivados más utilizados son **futuros** y **opciones**. En el marco de este capítulo nos adentraremos en futuros, los cuales cuentan con un complicado sistema de pagos de seguridad. Únicamente nos concentraremos en los **forwards**, los cuales tienen una estructura un poco más sencilla. Ambos son **contratos spot**. Además, el énfasis del capítulo será puesto en las opciones, las cuales son matemáticamente más interesantes. Intentaremos mostrar aplicaciones emocionantes de las matemáticas.
En el caso de **forwards**, éstos son contratos que le permiten al dueño, vender o comprar el subyacente a un precio fijo en un momento específico en el futuro. En el caso de futuros y de forwards, se tiene la obligación de comprar o vender el subyacente, al precio comprometido y en el momento en el tiempo acordado. Por el contrario, el dueño de una opción puede escoger si llegado el tiempo acordado, él desea vender el subyacente al precio acordado o no. Esto quiere decir que él tiene la posibilidad de elegir.

Las negociaciones existen desde la edad media, sin embargo, no fue hasta el final del siglo 19 y principios del siglo 20 cuando éstos han obtenido su actual auge, al estandarizar los contratos para los movimientos de la bolsa. Las opciones no aparecieron en el mercado hasta mucho tiempo después. Cuando en 1637 el mercado de tulipanes holandeses sufrió de un duro revés, éste también contaba con los primeros precursores de contratos de opciones. Las opciones se volvieron populares en 1973, cuando los matemáticos Black y Scholes lograron deducir una fórmula para la determinación de sus precios. Al mismo tiempo en Chicago, se abrió la "Chicago Board Options Exchange", la cual albergaría especialmente a las opciones. Fue entonces únicamente cuestión de poco tiempo para que el mercado de derivados floreciera.

Acciones - ¿son seguras?

Existen muchos motivos para invertir dinero en acciones. Por ejemplo, para apoyar a una compañía cuyo concepto de trabajo le agrada. También es posible que a uno le interese simplemente multiplicar su dinero basándose en productividad y no sólo a través de tasas de interés. Otro posible motivo es que uno desee lograr que el capital propio se desarrolle en forma proporcional al nivel de inflación. Después de todo, uno puede darse cuenta que la remuneración esperada de una acción es claramente más alta que la que se obtiene al dejar su dinero sujeto a una tasa de interés. Sin embargo, para todos estos argumentos existe siempre el riesgo de las oscilaciones imprevistas de la bolsa de valores. Si el mercado de valores se desploma, es muy posible tener al final mucho menos dinero que al principio.

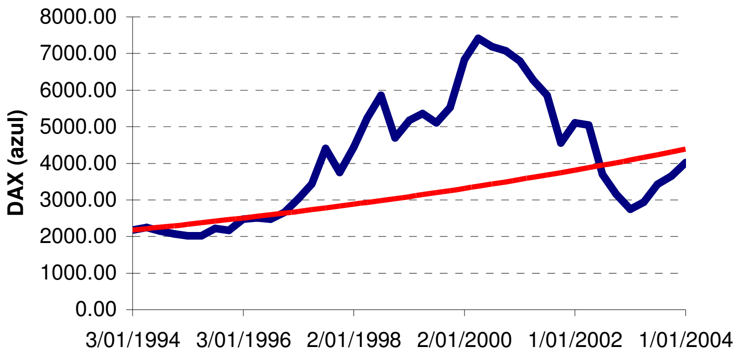

Figura 6.1 *Comparación del desarrollo del índice DAX con una tasa de interés de 7%*

La pregunta natural es si por consiguiente es posible invertir en acciones y a la vez poder asegurar el capital inicial. Es aquí donde las opciones entran al juego, porque aparte de causar especulación, las opciones son utilizadas para asegurar la remuneración.
Las instituciones bancarias se han dado cuenta que los clientes desean una especie de "acción segura" y ofrecen actualmente productos como por ejemplo "acciones con una red de seguridad". Por lo general se trata de una combinación de acciones con dinero fijo y opciones. Especialmente en tiempos malos para la bolsa, los productos financieros con garantía de capital son muy apetecidos y el crecimiento en el movimiento de estos productos lleva a que indirectamente las transacciones con opciones crezcan continuamente.
En el marco de la privatización de Telekom Alemania en 1996, fue donde apareció el primer producto con garantía que fue ofrecido al público en toda Alemania. Con el papel "Safe-T" del Commerzbank (Banco de Comercio), era posible hacerse acreedor de una opción que le permitía vender el contrato con Telekom en cualquier momento hasta 2002, o bien obtener el valor invertido en 1996 en la fecha de vencimiento del contrato. Esto quiere decir en otras palabras,

que el capital invertido en la acción de Telekom en el día de emisión se reintegraría. Es así como éste valor puede ser considerado como la primera “opción” que hubo en Alemania.

Discusión 1:

- Investigue en Internet si la compra de la opción “Safe-T“ resultó ser un aseguramiento de la inversión para el comprador (compare el precio de emisión de la acción de Telekom del 18 de noviembre de 1996, con la del año 2002). El precio a pagar de esta opción consistía en un pago del valor inicial de la acción de Telekom (precio al cual fue comprada la acción), así como de la entrega de dividendos por el tiempo del contrato (como remuneración por el aseguramiento del valor inicial). El valor en libros para este producto fue igual a cero. ¡Discuta!
- Infórmese respecto a productos actuales que ofrezca el mercado y que posean garantía. ¿Qué caracteriza a estos productos? ¿Qué condiciones y qué precios existen? ¿Se asegura siempre la inversión inicial completa o únicamente una parte de ella?

6.2 A fondo – conceptos, bases e historia

Opciones y Forwards

El concepto de opción no es conocido exclusivamente en el campo de las finanzas. Por el contrario, es utilizado mucho en el día a día y significa *tener una posibilidad* (“tengo la oportunidad de aceptar esta oferta…”). La característica principal de una opción así es que si bien uno puede aprovechar la oportunidad, no es una obligación. Desde este punto de vista, una opción presenta siempre algo positivo. Las mismas características presentan las opciones, cuando se usa bajo la terminología del mundo de las finanzas.
En general, por **opción** se entiende un contrato, que le garantiza a su comprador una remuneración no negativa de una suma no predeterminada, en un punto fijo en el tiempo. En el peor de los casos, uno no obtendrá ganancia alguna (es decir, se tendrá una remuneración de cero), o bien se obtendrá una remuneración estrictamente positiva. Al vendedor de la opción se le llama **aspirante** de la opción, mientras que al comprador se le llama **dueño** de la opción.
Las formas más conocidas de opciones, son la de compra y venta de opciones sobre acciones, llamadas **calls** y **puts** respectivamente. Ellas garantizan a su dueño el derecho (¡pero no la obligación!) de obtener del aspirante en el momento predeterminado T (también llamada **fecha de vencimiento**) y al precio K, llamado **precio strike**, la acción de una determinada compañía, en el caso de un **call**, o bien la venta al aspirante, en el caso de un **put**.
En las opciones se hace la distinción entre **opciones europeas** y **opciones americanas**. En las opciones americanas es posible ejercer el derecho sobre la opción en cualquier momento durante la validez del contrato, mientras que en las europeas, únicamente al final del período.
Las opciones se parecen en cierta forma a los ***futuros*** y a los ***forwards***. Sin embargo, en ellos no existe este derecho. Un contrato forward se refiere a poder vender o comprar un bien determinado en un momento fijo en el tiempo. Por el contrario, los futuros se diferencian de los forwards en el hecho que han sido estandarizados para las bolsas y requieren de cuotas de seguridad. Los forwards no son manejados por las bolsas, algo que sí sucede con los futuros. Es así como los forwards son manejados individualmente por bancos “en las ventanillas”, y es por eso que son también conocidos por las siglas OTC (del inglés “over the counter”).

Opciones - Call y Put

El dueño de un ***call*** ejercerá su derecho de adquirir la acción al precio K en el momento T, si el precio $P_1(T)$ de la acción es mayor que el precio strike K. Después de esto, él podría sacar al mercado la acción al precio $P_1(T)$ y así hacer uso de su opción y obtener una ganancia de $P_1(T) - K$. Por el contrario, si el precio $P_1(T)$ de la acción es menor que K, entonces el dueño del call no hará uso de su derecho. Esto es debido a que si él quisiera hacerse acreedor de la acción, le resultaría más favorable conseguirlo directamente en el mercado. La posesión de un call en este caso no redunda en una ganancia. Es así como se identifica un call europeo con el *premio de la opción*

$$B_{call} = \left(P_1(T) - K\right)^+ .$$

En forma gráfica, es posible representar el premio de un call europeo por el siguiente **diagrama de remuneración**:

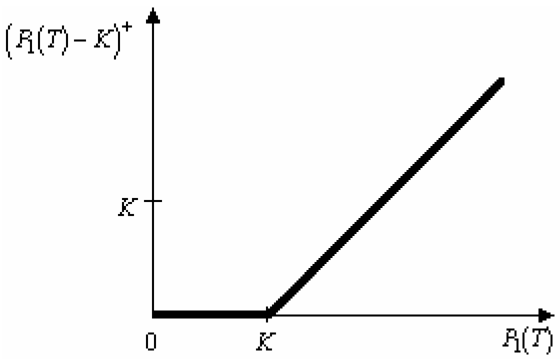

Diagrama 6.2 *Diagrama de remuneración para un call europeo*

De manera similar se comportará el dueño de un **put**. Éste aprovechará su derecho de vender la acción al precio K cuando el precio $P_1(T)$ de la acción sea menor a la del precio strike K dentro del tiempo remanente hasta la expiración de la opción. De ejercer la opción, él obtendría una ganancia de $K - P_1(T)$. Si en cambio el precio $P_1(T)$ de la acción es mayor que K, entonces el dueño del put no ejercerá su derecho, ya que si él desease vender la acción le resultaría más beneficioso hacerlo directamente en el mercado. Es así como se identifica un put europeo con el premio de la opción

$$B_{put} = \left(K - P_1(T)\right)^+ .$$

En forma gráfica, el premio del put europeo se puede representar por el siguiente diagrama de remuneración:

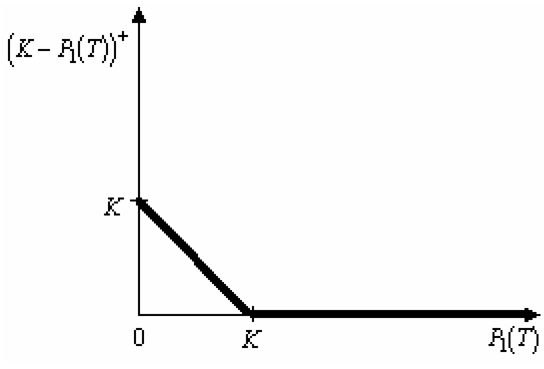

Diagrama 6.3 *Diagrama de remuneración para un put europeo*

__**Comparación: opciones - forwards**__

Tanto opciones como forwards son contratos sobre negocios a futuro. Las opciones incluyen un derecho a elegir, los forwards no lo incluyen. El total a recibir a futuro en forwards es conocido, la incógnita es si el negocio a futuro es ventajoso. En el caso de la opción, la suma a recibir es desconocida, sin embargo, debido a la existencia del derecho a elegir, se le garantiza al dueño que el negocio no terminará con pérdidas (“una remuneración no negativa”). De aquí es que se requiere de un pago en el presente (“pago de una prima”). Debido a la incertidumbre sobre la cantidad a recibir en el futuro, no es tan fácil determinar la cantidad de esta prima inicial. La idea generalmente aceptada para la determinación del precio de una opción es el principio de la réplica que será explicado en el siguiente apartado.

¿Por qué se realizan transacciones con opciones?

Debido a que opciones no poseen valor por si mismas, sino únicamente a través del bien sobre el cual están acuñados (por ejemplo acciones), es lógico preguntarse cuáles son las ventajas que presenta el movimiento de opciones.
El primer aspecto importante es el **aseguramiento de las variaciones indeseadas en el precio** del bien sobre el cual la opción esta acuñada. Si se posee por ejemplo una acción con un valor actual de 200€, entonces es posible que a través de la compra de un put con precio strike de 150 € para la duración de la opción, se pueda contar con una cota inferior de 150€, conformada en este caso por el “paquete” de la acción y un put, acuñada en la acción (ver Diagrama 6.4). Si en este caso el precio de la acción disminuye a un valor por debajo de los 150€, entonces es posible hacer uso del derecho de venta de la opción y de reintegrársela al vendedor por un precio de 150€. Si el precio de la acción no disminuye nunca por debajo de esta cota, entonces no será necesario ejercer este derecho de la opción en ningún momento. De forma similar es posible regular el precio futuro de compra de una acción, a través de la compra de un call.

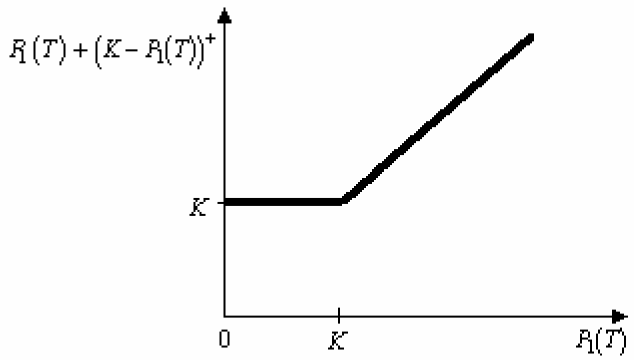

Diagrama 6.4 *Diagrama de remuneración de un “paquete” formado por una acción y un put*

El siguiente aspecto se refleja en el desarrollo del precio de la opción. Si bien no nos concentraremos en la determinación exacta del precio de una opción hasta más adelante, es de imaginarse que el desenvolvimiento del precio de la opción se desarrolla en forma diferente que el precio de la acción en la que esta acuñada. Si por ejemplo se observa un call sobre una acción y observamos el desenvolvimiento del mercado, es posible observar las siguientes relaciones:

- Si sube el mercado de valores, entonces sube el precio del call.
- Si el precio de la acción sube por 1€, entonces el precio del call sube por lo general por menos de 1€. Sin embargo, el crecimiento porcentual en el precio del call es mayor que el de la acción.

En forma análoga, estas observaciones son válidas para las reservas de inversión. Debido a mayores valores porcentuales en las ganancias y pérdidas de los calls, se habla de un **efecto de palanca** (en inglés: ***Leverage effect***), del cual les gusta aprovecharse a los especuladores.

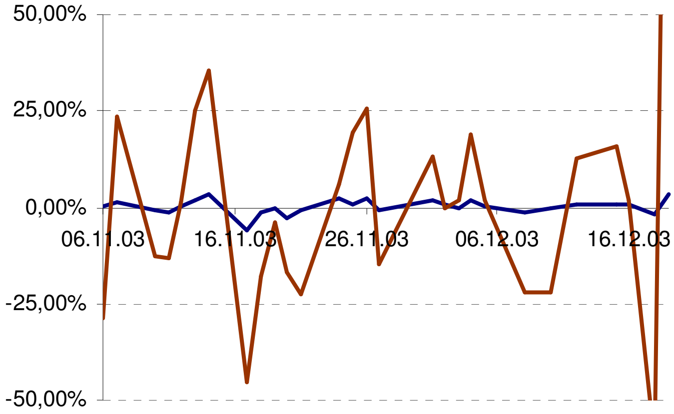

Diagrama 6.5 *Comparación de los cambios porcentuales diarios en los precios de las acciones (azul) con el del precio de un call (café) (datos empíricos)*

Estos efectos son ilustrados en los diagramas 6.5 y 6.6. En ellos se observa a una acción que oscilaba alrededor de un precio de 16€ al final del año 2003, y un call sobre esta acción, con un precio strike de 16€ y con vencimiento el 19 de diciembre de 2003. La primera gráfica ilustra el efecto de palanca al comparar la remuneración diaria de la acción con la del call. Como se observa en el diagrama 6.6, el 5/11/03 se invirtió el mismo capital en la acción y en la opción (sin embargo, fue necesario comprar alrededor de 15 opciones) y la cartera fue mantenida así durante unos meses. Es allí donde se puede ver el riesgo que acompaña al mercado de opciones y se puede concluir que:

- Opciones son valores finitos, es decir, caducan después de cierto tiempo.
- Si se invierte en opciones, es posible llegar a tener una **PÉRDIDA TOTAL**.

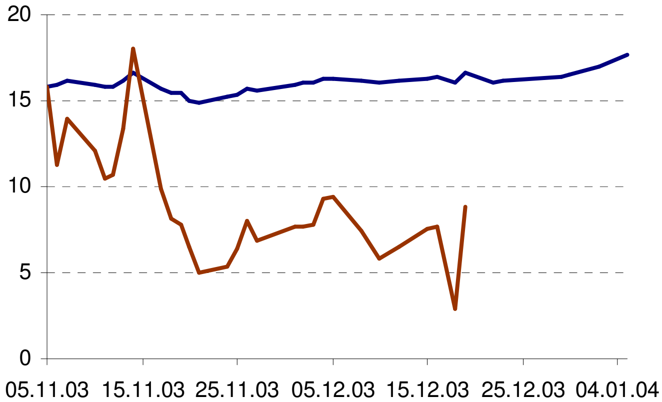

Diagrama 6.6 *Comparación del precio de una acción (azul) con el de un call (café) (datos empíricos)*

La pérdida total, la cual consiste en no recibir absolutamente nada de la prima pagada en el momento de la compra de la opción, no es una excepción a la regla, sino que sucede, dependiendo de las condiciones, relativamente frecuentemente. Esto se hubiese dado si el 19 de diciembre, el precio de la acción hubiese descendido por debajo de 16€, en lugar de haber crecido a 16.60 € como se representó en el diagrama.

En resumen existen por lo tanto dos razones principales para el movimiento de las opciones: **aseguramiento** y **especulación**.
(→Ej.6.1)

Discusión 2:

- ¿Cómo cree usted que el Commerzbank creó en 1996 el producto "Safe-T"? ¿Como una acción y call o como una acción y put?
- ¿Por qué es que se realizan transacciones con futuros y con forwards?
- ¿Cuáles son las desventajas de los futuros y de los forwards? ¿Cuáles son las ventajas de los contratos spot comparándolos con las opciones?

Historia del mercado de opciones

- **1634**: Los precursores de las opciones son manejados durante la gran venta de tulipanes en Holanda. Se concretan contratos sobre bulbos de tulipanes en el que se determina un precio de compra el cual únicamente vence si después de cierto tiempo, los bulbos no sobrepasan un determinado peso. En 1637, el mercado de tulipanes en Holanda se desploma. Dentro de los motivos se hace referencia a los negocios especulativos de los contratos con el carácter de las opciones.
- **1728**: primeras acciones-opciones de la compañía real de las indias occidentales y de guinea con las cuales se justificaba la compra de partes de la isla francesa de St. Croix.
- **1848**: Establecimiento del Chicago Board of Trade, el cual años más tarde se convertirá en una de las más grandes bolsas de futuros del mundo.
- **1973**: El Chicago Board of Trade inaugura la Chicago Board Options Exchange, la cual es la más grande bolsa de futuros del mundo. Las transacciones comienzan con calls, y cuatro años después se introducen también los puts.
- **1973** : Fischer Black y Myron Scholes publican sus investigaciones, las cuales incluyen la fórmula Black-Scholes para la evaluación de calls europeos y la cual les hizo acreedores del premio Nóbel. Robert Merton publica en el mismo año una generalización de ésta. También él recibió el premio Nóbel años después, en 1997, junto a Miron Scholes.
- **1975**: La American Stock Exchange (AMEX) inicia transacciones con opciones.
- **1988**: En Suiza se crea la Swiss Options Exchange (Soffex).
- **1990**: La bolsa de forwards alemana DTB (Deutsche Termin Börse) inicia operaciones.
- **1995**: Los arriesgados negocios del dueño Nick Leeson llevan a la bancarrota al banco Barings en Inglaterra.
- **1996**: La primera "opción para el pueblo" en Alemania aparece en el mercado con "Safe-T"

Ejercicios de repaso

Ej.6.1 Observe los diagramas 6.5 y 6.6.
a) Describa en detalle ambos diagramas.
b) Imagínese que la acción tuviese en la fecha de vencimiento del call un valor de 15.95€. ¿Qué valor tendría el call? ¿Cuál sería el valor de su inversión en el call?
c) El 6/11, el valor de un call es de 0.76€ y el de una acción 15.91€. ¿Cuál sería el resultado de haber invertido en la opción en lugar de la inversión en la acción?
d) El 21/11, el valor de un call es de 0.34€ y el de una acción 14.91€. Imagínese que usted es un corredor de bolsa muy inteligente y con mucha suerte. ¿Cómo hubiese usted hecho uso del efecto de palanca?

6.3 Conversación: Alta motivación – opciones como pagos orientados a la remuneración

¡Hasta el mejor climatólogo se equivoca! Habían anunciado un gran frío con un hermoso cielo azul y una probabilidad de lluvia de únicamente diez por ciento. Con esta información, el equipo de Consultores Inteligentes haría uso del nuevo coche deportivo azul de Selina para llegar a su próximo cliente. Sin embargo, la predicción del clima sólo acertó con lo del gran frío y gracias a la probabilidad estrictamente positiva de lluvia que también se hayan cumplido las predicciones, al quedarse atascados en el tráfico de la nevada carretera y helados por el frío por más de una hora en un día totalmente nublado, no fue precisamente lo que ellos habían esperado. Y como todo mundo se cuenta historias para calentarse un poco, empiezan los cuatro integrantes del grupo a conversar sobre su trabajo y sobre matemáticas.

Oliver: Estoy deseando llegar a las instalaciones de nuestro nuevo cliente. No sólo porque en su oficina se estará calientito, sino sobre todo porque me parece que nuestra nueva tarea es sumamente interesante.

Sebastián: Estoy de acuerdo contigo. La idea de la compañía de productos para el cabello Estrella S.A. de motivar a sus colaboradores a través del otorgamiento de un bono al final del año laboral en forma de acciones de la compañía, me parece excelente.

Selina: Bueno, yo preferiría recibir mejor, como gerente de la compañía, el valor en productos en lugar de recibir opciones sobre acciones.

Sebastián: Eso me lo puedo imaginar. Montañas de champú, spray y tintes en todos los colores se estarían apilando en tu baño.

Nadine: Yo estaría únicamente interesada en un bono entregado con productos, si fuese la gerente de una fábrica de chocolates o de dulces. ¿Quiere alguien un par de los chocolates que traje?

Selina: No gracias, éstos contienen alcohol y hoy debo de estar concentrado.

Oliver: ¡Ojalá puedas estar concentrado, porque de aquí a que nos movamos de este lugar pasará mucho tiempo! Nadine, a mí me puedes pasar unos cuántos, creo que los chocolates me darán un poco de calor en este frío. Recompensar con productos propios es en general una buena idea. Sin embargo, aún con chocolates, estoy seguro que existe en mí un límite en cantidad de chocolates que pudiese consumir. Sin embargo, con las opciones, la historia es diferente. Después de todo, éstas tienen un valor y cuantas más opciones se tengan, mayor será el bono recibido. Y todo esto, sin tener que lidiar con montañas de productos, que convertirían mi hogar en supermercado.

Nadine: Además, las opciones cambian de valor conforme la gerencia de la firma dirija a la compañía de forma eficiente y los productos penetren en el mercado. ¿Sabéis cuales son las opciones individuales que deberemos analizar?

Selina: Estrella S.A. está considerando entregarle a los gerentes opciones call. Otras posibilidades son opciones de índices y opciones de barrera. Una de nuestras responsabilidades es elegir la variante que motive más a los gerentes y decirle a la vez a la compañía, los costes relacionados.

Oliver: ¡Verdaderamente tenemos un gran desafío frente a nosotros!

Sebastián: Nadine, ¿tienes tú el esquema de los diferentes tipos de opciones que hemos recopilado?

Nadine: ¡Por supuesto! ¡Tú sabes que yo soy siempre muy ordenada!

Esquema de los diferentes tipos de opciones:

Opción-Call: se obtiene el derecho de comprar una acción a un precio previamente determinado.

Opción-Put: se obtiene el derecho de vender una acción a un precio previamente determinado.

Opción-Digital: si el precio de la acción se encuentra al vencimiento por arriba o por abajo de un valor previamente determinado, entonces se obtiene una suma de dinero determinada.

Opción sobre un mínimo / máximo de múltiples acciones: se obtiene el derecho de comprar (vender) la acción de más bajo valor (la de mayor valor) de entre un paquete, a un precio previamente determinado.

Opción de índices: si el precio de una acción al vencimiento del contrato se encuentra sobre el precio de una acción de control (sin embargo generalmente se utiliza un índice como el Dow Jones o el DAX), entonces se recibe la diferencia entre los precios.

Opciones de barrera: si durante la duración del contrato, el precio de la acción sube de un determinado precio (baja de un determinado precio), se obtiene (pierde) el derecho de comprar (vender) la acción a un precio previamente determinado.

Opciones europeas: únicamente es posible ejercer el derecho sobre la acción al final del contrato.

Opciones americanas: es posible ejercer el derecho de la acción en cualquier momento durante la duración del contrato.

Selina: Opciones-call como recompensa son definitivamente apetecibles. Los calls resultan una ganancia, cuando el precio de una acción se encuentra por encima del valor previamente determinado. Además, la ganancia es mayor cuanto más grande sea el verdadero precio de la acción. Si yo, como gerente de una compañía, me esfuerzo por incrementar el valor de la compañía en el mercado bursátil, es decir a través del precio de las acciones, y éste aumenta dramáticamente, entonces podré al final recibir como recompensa vender opciones-call, obteniendo una gran ganancia.

Sebastián: La desventaja es, sin embargo, que es necesario determinar un precio de compra para la acción en el call desde el principio. La determinación de un valor real que al final influya en la motivación de los gerentes es muy difícil de determinar. Es por ello que en mi opinión, una opción de índices es la más indicada. Si el precio de la acción de la compañía es mayor que el precio de control, entonces los gerentes habrán realizado una buena tarea y podrán alcanzar una ganancia con sus opciones. Esto les motivaría adicionalmente a esforzarse aún en tiempos difíciles, para ser en todo momento mejores que la competencia.

Nadine: Estas opciones que únicamente dependen del precio final de la acción no me terminan de convencer. Esto podría motivar a los gerentes a mejorar la situación de la compañía únicamente al final del período, para así incrementar a corto plazo el valor de la acción.

Selina: ¡Esos son cuentos! ¡La mayoría de gerentes son profesionales y honestos!

Sebastián: ¡Eso lo crees únicamente tú, Selina!

Nadine: ¡Selina, mejor enciende el motor y conecta la calefacción que me estoy congelando!

Selina: ¡Silencio atrás! Aún estamos atascados en pleno tráfico y dejar el motor apagado es más ecológico y económico. Además, estoy segura que en Estrella S.A., mi querido Sebastián, contamos con personas de conocido renombre.

Oliver: Y ¿qué opináis vosotros respecto a una opción de barrera? Con ella es, por ejemplo, posible determinar cotas inferiores. Mi idea sería entonces la de otorgar una opción de barreras que otorgue el derecho a comprar una acción a un precio previamente determinado, pero únicamente cuando el precio de la acción no baje de una cota inferior. Esto impediría que los gerentes tomen decisiones arriesgadas que puedan llevar al fin de la compañía. Además, esta opción no depende del precio al final del período de la acción.

Nadine: En mi opinión, opciones de barrera son injustas. Si por ejemplo la bolsa se desploma, en la mayoría de las situaciones no será por culpa de los gerentes de Estrella S.A. Sin embargo, debido a la barrera anunciada al principio, la opción que ellos tendrán en sus manos, no tendrá ningún valor real. Yo opino que lo mejor es una opción que calculase una especie de promedio entre todos los precios y que dependa de dicho valor...

No pasa mucho tiempo, y nuestro equipo de Consultores Inteligentes se encuentran en medio de un ardiente debate sobre los efectos que puede causar una opción o la otra en la motivación de los gerentes.

Discusión 3:

- Analice usted en que forma los diferentes tipos de opciones pueden llegar a motivar a un gerente a sacar adelante a la compañía para la que trabajan. Analice a la vez, las desventajas de este sistema de recompensas.
- Infórmese en Internet o en el periódico acerca de la existencia de tipos de opciones que puedan interesarle a Nadine.

6.4 Continuación de la conversación: así o así – el principio de duplicación

Debido a la discusión en la que se encuentran, a Selina se le pasa por alto que los coches se empiezan a mover. Es únicamente debido al sonido de las pitadas que ella se acuerda de volver a arrancar el motor y ponerse en marcha. Sin embargo, el goce de conducir se ve nuevamente interrumpido un kilómetro más adelante, puesto que un camión se encuentra atravesado en la autopista y bloquea el paso. Selina que se encuentra en el carril de alta velocidad como siempre, se hace más hacia la izquierda para darle la oportunidad a la grúa de hacer su tarea. Mientras que los cuatro esperan y ansían una sopita caliente, empiezan de nuevo a tratar sobre sus temas favoritos.

Nadine: En serio, en lugar de una opción o champú, el bono que como gerente me llamaría más la atención sería el de recibir una cantidad fija de dinero en mi cuenta de ahorros. Esto es mucho más seguro y así también sabe uno, cuánto va a recibir.

Sebastián: No es posible que lo veas desde este punto de vista tan simple. Lo primero que tenemos que hacer es contar con un parámetro de referencia para poder determinar si el gerente ha ejecutado bien sus tareas. En cierta forma, esto se ve reflejado en el concepto y el precio de una opción. Y en segundo lugar, con la ayuda de la evaluación de opciones y sus fundamentos matemáticos, nos es posible calcular el verdadero valor de la opción y es así que después de estos cálculos sabrás cuánto es lo que recibiríais.

Selina: Para ello necesitamos entre otras cosas, la fórmula Black-Scholes, la cual fue desarrollada en la década de los 70. Es sorprendente que no haya sido posible hasta 1970 calcular el precio de una opción. No es posible que la evaluación de opciones sea tan compleja, ¿o sí?

Sebastián: ¿Lo dices en serio? Entonces, ¿qué solución propones?

Selina: Yo calcularía simplemente el valor esperado de la liquidación en la fecha de vencimiento.

Sebastián: ¡Eso lo quiero ver yo!

Nadine: Sebastián, no seas tan odioso. La respuesta que dio Selina no esta tan alejada de la realidad. Simplemente se le han olvidado unos pequeñísimos detalles. Lo mejor es observar un sencillo ejemplo.

Supongamos tener una acción que hoy en día cuesta 1€ y que con una probabilidad de a aumentará de precio a 2€ dentro de un mes, o bien que con la probabilidad de (1-a) disminuirá a un precio de 0.75€:

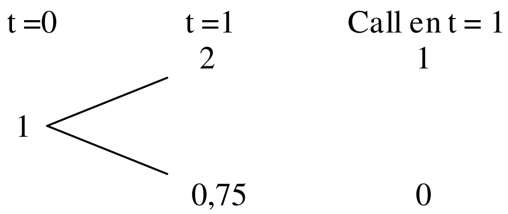

Diagrama 6.7 *Desenvolvimiento del precio de una acción ficticia y premio de un call ficticio, con precio de ejercicio de 1*

Supongamos además que hemos comprado un call europeo sobre esta acción, a un precio strike de 1€ y con fecha de vencimiento en un mes. Si el precio de la acción sube a 2€, nos alegraremos de nuestra opción, ejerceremos nuestro derecho y compraremos la acción al precio de 1€, después venderemos la acción en el mismo momento y obtendremos así una ganancia de 1€. Si por lo contrario la acción ha perdido su precio, no ejerceremos nuestro derecho sobre la opción, dejaremos caducarla y tendremos una pérdida por el valor del precio de la opción. Es así como el valor esperado para nuestra posible ganancia es de

$$E\left(\left(P_1(T)-K\right)^+\right)=(2-1)\cdot a+0\cdot(1-a)=a\ .$$

Oliver: Este valor esperado a lo podríamos utilizar simplemente como el valor de la opción. Lo único que deberíamos hacer entonces, es determinar lo más exacto posible el valor de la probabilidad.

Sebastián: Oliver, ¿no me digas que ya no te acuerdas como es que es el proceso de evaluación de opciones?

Oliver: Bien, me acuerdo así a lo lejos. Un valor completamente desconocido que debiese ser estimado, no aparecía dentro del precio de la opción. Por otro lado, es necesario darse cuenta que en el mercado existen otras opciones, como por ejemplo los depósitos fijos.

Selina: ¡Claro! ¡Ahora me acuerdo! Debido a que la opción es un derivado de la acción, me es posible reproducir el pago final de la opción con la ayuda de la acción, el depósito fijo y el crédito.

Si por ejemplo me comprometo a un crédito de 60 y compro 80 acciones y con esta cartera abro un depósito, entonces obtengo después de un mes, independientemente de lo que pase, exactamente la misma suma de dinero que me darían por 100 opciones. Si el precio de la acción sube, tendré después del reembolso del crédito, un superávit de 100. Si el precio de la acción baja, entonces tendré una cuenta final pareja, o sea una ganancia de 0.

Oliver: ¿Cómo es que llegas a esta conclusión?

Selina: ¡Es algo que me dice mi sexto sentido!

Nadine: Ve pues: ¡matemáticas y sexto sentido! Señores, lo que necesitan es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. x será la cantidad de dinero que será invertido en el depósito y y serán las partes que se comprarán de la acción. Para trabajar con datos más simples, supongamos que la tasa de interés para créditos y depósitos sea de cero.

Si el precio de la acción sube, entonces nuestra cartera tendrá el valor de 1 y ese sería el valor que ganaríamos con una opción. Si la acción baja, entonces el resultado tiene que ser 0. Esto nos devuelve las siguientes dos ecuaciones:

$$x + y \cdot 2 = 1 ,$$

$$x + y \cdot 0,75 = 0 .$$

La solución de este sistema es $x = -0.6$ y $y = 0.8$.

Selina: ¡Muy bien! Multiplicad ahora estos valores por cien y obtendrán justamente mis valores.

Nadine: Entonces si deseo adjudicarme esta cartera, necesitaré de un capital de $-0.6+0.8 \cdot 1=0.2$. Como mínimo, esto es lo que vale la opción, puesto que este es la cantidad de dinero que se requiere para recrear la opción. Es decir, para obtener los mismos beneficios, como si se poseyese la opción.

Selina: ¡Si la opción fuese más cara en el mercado, entonces habría posibilidades de arbitraje para mí! Si el precio de la opción en el mercado estuviese por arriba de 0.2, entonces se replicaría la opción un sin fin de veces y generaría una igual cantidad de contratos de opciones para las personas. Después de todo, para la réplica necesito de únicamente 0.2, pero por opción vendida obtengo como poco 0.2. En ese momento, estaría haciendo una rotunda ganancia con cada opción vendida. Después de un mes, pago las eventuales ganancias generadas por la opción a los dueños de las opciones y listo. Gracias a la exacta recreación de la opción, tendré el dinero a la disposición y todo el negocio tiene cero riesgo para mí. ¡De veras que es de ensueño!

Sebastián: No sé que decirte: ¡el precio de la opción no se determina a partir de la desconocida y subjetiva probabilidad de éxito a, sino que de los costes relacionados en hacer una réplica de la opción! Es únicamente así posible formular un modelo de mercado sin posibilidades de arbitraje. Este principio de la evaluación de las opciones se llama el **principio de la réplica**, debido a que con ayuda de la acción, el depósito y el crédito se duplica la opción.

Selina: Nadine, ahora explícame: ¿por qué era que mi sospecha respecto al uso del valor esperado no estaba del todo equivocada?

Nadine: Si observas el valor esperado en un mercado neutral al riesgo, entonces el valor esperado es el precio de la opción. Sin embargo, en ese momento tendrás que incorporar una diferente medida de la probabilidad...

Poco a poco se le hace más evidente a Selina el motivo por el cual la fórmula Black-Scholes para la evaluación de opciones no fue descubierta hasta ese momento en la historia. La abundancia de conocimientos de Nadine en cuanto a esta temática, hace además que los escalofríos corran a lo largo de su espalda. Cuando a unos 100 metros delante de ella, las luces de atrás de los coches se encienden y la cola de coches se pone lentamente en movimiento. Selina enciende el motor y le señala a sus amigos que a partir de ahora ya no puede prestar atención más que al conducir.

Ejercicios de repaso

<u>Ej.6.2</u> Describa la forma en la que usted aprovecharía las posibilidades de arbitraje, si el precio de la opción de la conversación se situase por abajo de 0.2

Ej.6.3 Calcule el valor esperado del pago al vencimiento de las siguientes opciones. ¡Recuerde en todo momento, que éste no es el precio de la opción!
Las acciones tienen ahora el precio de 2, después de un mes, el valor aumenta a 2.5 con probabilidad p=0.6 o bien disminuirá a 1.8.
a) Considere un call europeo sobre esta acción, cuya fecha de vencimiento es un mes después y cuyo precio strike es de 2.
b) Considere un call europeo sobre esta acción, cuya fecha de vencimiento es un mes después y cuyo precio strike es de 1.9.
c) Considere un put europeo sobre esta acción, cuya fecha de vencimiento es dentro de un mes y cuyo precio strike es de 2.
d) Considere un put europeo sobre esta acción, cuya fecha de vencimiento es dentro de un mes y cuyo precio strike es de 2.2.
Ej.6.4 Determine los precios de las opciones del ejercicio 6.2 de acuerdo al principio de la réplica. Para la simplificación de los cálculos, suponga que los depósitos y los créditos están sujetos a una tasa de interés de 0%.
Ej.6.5 ¿Qué precio le daría usted a la siguiente opción, dentro de un modelo binomial?
La acción tiene hoy el precio de 10; después de un mes, el precio sube a 15 con una probabilidad de p=0.6 y en caso contrario, bajará a 8. Para la simplificación de los cálculos, suponga que los depósitos y los créditos están sujetos a una tasa de interés de 0%. Analice un call europeo, con precio strike the 15.

6.5 Fundamentos matemáticos: principios de la evaluación de opciones

Contratos de forwards:

Los forwards son generalmente establecidos sobre bienes, valores o divisas para aquellos contratantes que quieran comprarlos (o necesiten comprarlos) a corto plazo. Generalmente sirven para el aseguramiento de los precios. Frecuentemente el comprador se encuentra a la espera de un flujo de dinero seguro. Para determinar la forma en la que se evalúan los forwards, analizaremos un forward sobre una acción, el cual tiene un precio actual de $P_1(0)=p_1$ y que no devuelve dividendos durante el período de devengo. El precio de compra K para la acción en T es generalmente convenido de tal forma que el valor actual del contrato, es decir t=0, sea cero. Así, más que tratar el valor del contrato, los esfuerzos se concentran en la determinación del precio K, el cual hará de valor del contrato al final del período, un contrato sin coste alguno. Este precio es conocido como el **precio del forward.**

En las siguientes observaciones, para determinar el precio futuro K, se tomará en cuenta que existen diversas posibilidades de colocar dinero (sin riesgo). Además de la posibilidad de invertir en la acción, observaremos depósitos fijos con una tasa de interés de r %. Por lo demás, existe la posibilidad de hacerse acreedor de créditos a la misma tasa de interés.
Lo primero es que al dueño de las acciones se le da la oportunidad de meditar si en lugar de poner a disposición su acción a través del forward en el tiempo T, prefiriese vender su acción al actual precio de p_1. Este dinero lo podría colocar entonces en un plazo fijo y al vencimiento, en el tiempo T, tendría la siguiente suma de dinero:

$$e^{r \cdot T} \cdot p_1 .$$

Es así como el vendedor de la acción deseará obtener con el forward una cantidad cuanto menos de $K=e^{rT}p_1$. Por otro lado, el comprador de la acción podría comprar su acción directamente en el mercado y financiar la compra a través de un crédito por la suma de p_1. Es así como en el instante de tiempo T deberá devolver la siguiente suma de dinero:

$$e^{r \cdot T} \cdot p_1$$

Es así como él aceptaría un contrato de un forward si el precio K es menor a este valor, de esta forma el precio de compra K queda claramente definido.

Precio de un forward:

El contrato de un forward sobre una acción a un precio de compra K en el momento T posee exactamente hoy el valor de cero, si el precio de compra K elegido es

$$K = e^{r \cdot T} \cdot p_1$$

donde p_1 es el precio actual de la acción.

En las discusiones previas se mostró el principio de la réplica, el cual es muy importante para la determinación del precio de las opciones. A continuación veremos que en la evaluación de pagos (inseguros) a futuro, es determinante conocer si es posible obtener una misma liquidación a través de otro tipo de bonos.

Discusión 4:

Es posible en el contrato de un forward dar un precio arbitrario pero fijo K. En este caso, el contrato ya no sería sin coste alguno. Utilice un argumento parecido a la réplica para calcular el precio de este forward en el momento de la fecha de vencimiento del contrato.

Evaluación ingenua del contrato de una opción

Deseamos en primera instancia demostrar en un modelo binomial de un periodo, un aparente proceso lógico para la determinación de los precios de una opción. A la vez, desearemos aclarar como es que en realidad este proceso lleva por lo general a un precio equivocado.
Observamos un mercado en el que es posible tasar dinero a una tasa de interés de 5% para un determinado período y donde es posible invertir en una acción, cuyo precio viene indicado en el diagrama 6.8.

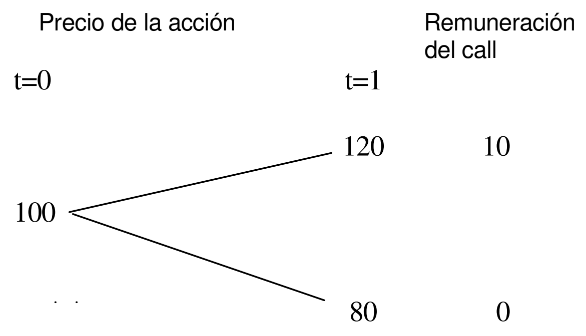

Diagrama 6.8 *Precio de una acción y remuneración de un call con un precio strike de* $K = 110$

En este ejemplo ilustramos que el precio de la acción se incrementará con una probabilidad de 80% mientras que el precio caerá con una probabilidad del 20%. En el marco de este modelo, deseamos determinar el precio de un call europeo sobre una acción, con precio strike K=110. De acuerdo a las suposiciones previas, obtendremos al final por la posesión del call un pago de 10 con probabilidad de 0.8, y en caso contrario no se obtendrá ningún pago. Debido a que la liquidación no se lleva a cabo hasta el final del período, es lógico reducir este valor por el 5% de la tasa de interés existente en el modelo. Es así como obtenemos:

$$\textbf{liquidación esperada} = E\left(\left(P_1(1)-110\right)^+\right) = 0{,}8\cdot 10 + 0{,}2\cdot 0 = 8\,,$$

$$\textbf{"precio sugerido"} = 8\cdot e^{-0{,}05\cdot 1} \approx 7{,}61\,.$$

Ahora bien, ¿es éste el precio real de la opción?
Un punto crítico es que el precio de la opción depende de nuestra estimación de la probabilidad de un aumento en el precio de la acción. Debido a que por lo general dos diferentes inversionistas estimarán diferentes valores para esta probabilidad, sería muy difícil el ponerse de acuerdo en un precio. Sin embargo, esta dificultad no sucede en la realidad, puesto que el proceso correcto para la determinación del precio de una opción es diferente. Y éste está basado en el principio de la réplica.

Principio de la réplica:
Si dos diferentes bienes devuelven exactamente los mismos flujos de pago, entonces sus precios deben coincidir en todo momento en el tiempo.

Demostración del principio de la réplica:

El principio de la réplica es una consecuencia directa de la suposición dada sobre la ausencia de arbitraje (compárese aquí la definición dada sobre éste en el capítulo 5). Si por ejemplo el bien 1 es más caro que el bien 2, entonces es posible vender el bien 1 al vacío, es decir, sin necesidad de poseerlo. De la ganancia obtenida, se puede comprar el bien 2 e invertir el dinero restante en una opción sin riesgo (o bien, conservar el dinero en efectivo si esto no fuese posible). Todos los rendimientos alcanzados a partir de la venta al vacío del bien 1 pueden ser vendidos por la posesión del bien 2, debido a que ambos bienes tienen el mismo flujo de pago y que por lo tanto se neutralizan. La ganancia sin riesgo quedaría entonces en la diferencia de precios entre el bien 1 y el bien 2. Es así como hemos demostrado la existencia de una estrategia de arbitraje. Sin embargo, ésta está en contradicción con la suposición de la ausencia de arbitraje del mercado. Por consiguiente, los precios de ambos bienes deben coincidir en todo momento.

Aplicación del principio de la réplica en un problema de evaluación de opciones

Aplicaremos ahora el principio de la réplica en nuestro problema de evaluación de opciones en el modelo binomial. Si dentro de este modelo podemos encontrar una estrategia de inversión en la que la acción y la inversión financiera sin riesgo, sobre la cual está basado un call, lleve al mismo pago final que la posesión de un call, entonces, basándose en el principio de la réplica, el precio del call debe ser el mismo que el de un activo origen, el cual fue requerido para el seguimiento de esta estrategia de inversión.

Para esto, sea φ la cantidad de la inversión financiera sin riesgo realizada al inicio del período y sea ψ la cantidad de acciones que fueron adquiridas al principio del período. Debido a que la posesión de un call lleva en el caso de un aumento de precios a un pago al vencimiento de 10, mientras que para una caída en precios a un pago de cero, se dice que la “estrategia de réplica” $(\varphi,\ \psi)$ viene dada por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\varphi\cdot\ e^{0{,}05\cdot 1} + \psi\cdot 120 = 10\,,$$

$$\varphi\cdot\ e^{0{,}05\cdot 1} + \psi\cdot 80 = 0\,.$$

Debido a que este sistema de ecuaciones tiene una solución exacta, es decir $(\varphi,\ \psi) = (-20/e^{0{,}05}, 1/4)$, obtenemos el precio del call basándonos en el principio de la réplica (recordar que el modelo binomial de un período descrito previamente es un modelo de mercado sin arbitraje), como el precio actual de la estrategia de la réplica $(\varphi,\ \psi)$

$$\textbf{Precio de la opcion} = \varphi + \psi\cdot 100 \approx 5{,}9754\,.$$

Observaciones y ejemplos

Debido a que además de calls y puts existen muchos otros tipos de opciones, vamos a definir ahora el concepto de opción en forma general, antes de presentar el resultado general de la evaluación de opciones.

Definición:
Por una opción (de tipo europeo) entendemos una variable aleatoria no negativa B, la cual determina un pago al dueño de la opción en la fecha de vencimiento, y la cual únicamente depende del desarrollo del precio de la acción hasta el punto T.

Calls y puts europeos con precio strike K y fecha de vencimiento T se pueden identificar bajo los pagos a realizar al vencimiento de acuerdo a las siguientes ecuaciones:

$$B_{call} = \left(P_1(T) - K\right)^+ \quad \text{bzw.} \quad B_{put} = \left(K - P_1(T)\right)^+$$

Para simplificar la descripción, se supuso la elección de la "primera" acción, dentro de la opción. En la sección sobre opciones exóticas se tratarán algunos ejemplos adicionales sobre opciones más complejas. En el caso de una opción de **tipo americano**, el dueño de la acción puede elegir si desea hacer uso de su derecho sobre la opción en cualquier momento en el tiempo $t \in \{0,1,...,T\}$. Evaluar una opción americana se vuelve por lo tanto mucho más complejo que en el caso de opciones europeas. En las siguientes secciones trataremos esta problemática por separado.

En la aplicación del principio de la réplica para la evaluación de nuestro call mostrado en el ejemplo, uno de los aspectos fundamentales es la existencia de una estrategia de réplica. Es así como formalizamos lo siguiente:

Definición:
Un mercado, en el que es posible replicar todas las opciones, se llama **mercado completo**.

Del principio de la réplica se obtiene entonces:

Teorema:
En un mercado completo, el precio de la opción viene determinado por el precio actual de la estrategia de la réplica asociada.

Es así como se originan las siguientes preguntas:
- ¿Cómo se determina en un modelo de mercado real (como por ejemplo, el modelo de Black-Scholes descrito en el capítulo 5) el precio de una opción?
- ¿Cómo se obtiene el precio de las opciones en un mercado incompleto?
- ¿En qué relación se encuentra el "precio recomendado" con el precio sugerido por el principio de duplicación para la compra de opciones?

Discusión 5:

Frecuentemente se usa en el día a día el principio de la réplica, para la evaluación de precios. Por ejemplo, se puede comparar el precio de un ticket de bus de Madrid a Valladolid con los costes individuales por zonas por las que se viaje en autobús. ¡Busque otros ejemplos!

Ejercicios de repaso

Ej.6.6 Determine los precios de los siguientes forwards. ¿Cuál es el precio K que habría que negociar para el período de tiempo T, si la acción cuesta hoy en día p_1 y la tasa de interés en el mercado es r?

a) p_1=100, r=0.05, T=2 b) p_1=120, r=0.09, T=1

c) p_1=90, r=0.04, T=1/2 d) p_1=110, r=0.02, T=1/4

Ej.6.7 Imagínese que usted dirige una compañía y debe pagar en T la suma de 1000$. Para cuidarse de las variaciones en la tasa de cambio entre el Euro y el Dólar, se hace usted acreedor de un forward en dólares. ¿Cuál sería el precio de compra K (en Euros) lógico para los dólares, si uno observa que es posible invertir en euros a una tasa de interés de r mientras que en dólares, a una tasa de interés de s?

a) Describa detalladamente su modelo y deduzca una fórmula.

b) Determine el precio de compra K en el caso que T=1/2, r=0.02, s=0.05, y que la tasa de cambio actual sea de 1$=0.95€

Ej.6.8 a) Determine el precio de un call europeo en un modelo binomial de un período, donde p=0.7, d=1, u=1.1, tasa de interés r=0.07, T=1, precio inicial de la acción p_1=100 y precio strike K=100.

b) Determine el precio de un put europeo en un modelo binomial de un período, donde p=0.7, d=1, u=1.1, tasa de interés r=0.07, T=1, precio inicial de la acción p_1=100 y precio strike K=110.

6.6 Fundamentos matemáticos: el precio de las opciones en el modelo binomial

El precio de las opciones en el modelo binomial de un período

Deseamos iniciar esta sección analizando a fondo la relación entre el primer estimador que propusimos, o sea el valor esperado de la remuneración sujeta a una tasa de interés y el verdadero precio de la opción en el ejemplo del modelo binomial. Para ello observaremos un modelo de un período, en donde el inversionista posee la posibilidad de depositar su dinero a plazo fijo con tasa de interés r o en una acción cuyo precio actual es p_1. El precio de la acción viene descrito por un modelo binomial de un período, con factores de propagación u y d, el cual es descrito gráficamente en el diagrama 6.9.

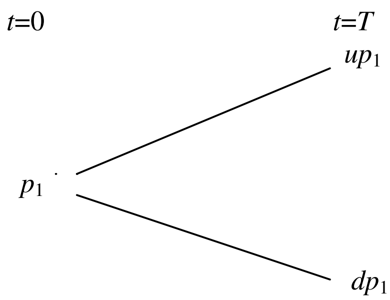

Diagrama 6.9 *Precio de una acción en el modelo binomial de un período*

En éste suponemos que el precio de la acción aumentará con probabilidad p hasta la fecha de vencimiento T y que disminuirá con la probabilidad de $1-p$. Se exige la condición habitual

$$d < e^{rT} < u \,, \tag{*}$$

para eliminar cualquier posibilidad de arbitraje en este modelo. Nuestra meta es evaluar una opción con un premio al vencimiento de $B(P_1(T))$, es decir un pago final que únicamente depende del precio de la acción en el día del vencimiento de la opción. Para ello hacemos uso del principio de la réplica, es decir buscaremos una dupla (φ , ψ), la cual hará que nuestra inversión de φ unidades de dinero pueda ser depositada en una cuenta de plazo fijo y en ψ acciones, que en $t=0$ describen acciones y que en $t=T$ proveen la misma remuneración que la ciones, que en $t=0$ describen acciones y que en $t=T$ proveen la misma remuneración que la opción. Es así como esta dupla debe satisfacer las siguientes dos ecuaciones:

$$\varphi \cdot e^{rT} + \psi \cdot up_1 = B(up_1),$$

$$\varphi \cdot e^{rT} + \psi \cdot dp_1 = B(dp_1).$$

La solución única a este sistema de ecuaciones es

$$\varphi = \frac{uB(dp_1) - dB(up_1)}{e^{rT} \cdot (u-d)}, \qquad \psi = \frac{B(up_1) - B(dp_1)}{p_1 \cdot (u-d)} .$$

Haciendo uso de esta solución, se obtiene el siguiente resultado:

Teorema: "precio de las opciones en una medida neutral al riesgo "
En el modelo binomial de un período, bajo la suposición (*) y para el precio p_B de la opción con premio $B(P_1(T))$, se obtiene:

$$p_B = \left(q \cdot B(up_1) + (1-q) \cdot B(dp_1)\right) \cdot e^{-rT},$$

donde

$$q = \frac{e^{rT} - d}{u - d}$$

y la relación $0<q<1$ es válida y q determina una probabilidad.

Demostración:
Después del Teorema del principio de la réplica y debido a la forma explícita de la forma de la estrategia (φ, ψ) se tienen para el precio de las opciones, las siguientes relaciones:

$$p_B = \varphi + \psi \cdot p_1 = \frac{uB(dp_1) - dB(up_1)}{e^{rT} \cdot (u-d)} + \frac{B(up_1) - B(dp_1)}{(u-d)}.$$

Además, con ayuda de la definición de q es posible deducir de esta ecuación

$$p_B = \frac{1}{e^{rT}} \cdot \frac{uB(dp_1) - dB(up_1) + e^{rT} \cdot B(up_1) - e^{rT} \cdot B(dp_1)}{(u-d)}$$

$$= \frac{1}{e^{rT}} \cdot \left(\frac{\left(u - e^{rT}\right) B(dp_1)}{u-d} + \frac{\left(e^{rT} - d\right) B(up_1)}{u-d} \right)$$

$$= e^{-rT} \cdot \left(q \cdot B(up_1) + (1-q) \cdot B(dp_1)\right). \quad \square$$

Observaciones respecto a la medida "neutral al riesgo"

Al observar la distribución binomial con probabilidad de éxito q y si denominamos al valor esperado del precio de la acción bajo E_Q, entonces obtenemos:

$$E_Q\left(e^{-rT} \cdot P(T)\right) = e^{-rT} \cdot \left(q \cdot up_1 + (1-q) \cdot dp_1\right)$$

$$= \frac{p_1}{e^{rT}} \left(\frac{\left(e^{rT} - d\right)\ u}{u-d} + \frac{\left(u - e^{rT}\right)\ d}{u-d} \right) = p_1 .$$

Con relación a la distribución binomial, el valor esperado del precio final de la acción es precisamente el mismo que el valor actual de la acción. Es decir, la acción esta sujeta a una tasa de interés, como si fuese un plazo fijo. Su precio no incluye ninguna prima por riesgo (a través de una tasa de interés más alta). Esta distribución binomial en particular es denotada por lo tanto bajo el símbolo Q y el término "**medida neutral al riesgo**". De acuerdo con el último teorema, la siguiente relación es válida para esta medida:

$$p_B = E_Q\left(e^{-rT} B\left(P_1(T)\right)\right),$$

lo que quiere decir que de acuerdo a la medida neutral al riesgo, se obtiene el precio de la opción como el valor esperado sujeto a una tasa de interés de la remuneración de la opción. Es así como en el modelo más simple, el modelo binomial de un período, hemos encontrado una respuesta a la tercera pregunta de la sección 6.5:

El precio de una opción es equivalente al "precio natural", si hacemos uso de la **medida neutral al riesgo Q** como medida de la probabilidad.

Por esto también se habla de una **evaluación neutral al riesgo**. Éste es un resultado bastante sorprendente y es posible mostrar que en todo mercado completo y libre de arbitraje, este resultado es válido. Sin embargo, una consecuencia que es necesario mencionar es la siguiente:

El precio de la opción es independiente de la estimación personal de la probabilidad p para un crecimiento en el precio.

Esto puede interpretarse a simple vista como un resultado increíble, puesto que no pareciera ser posible que el precio de una opción sea independiente de la probabilidad de obtener una remuneración positiva o no, al final del contrato. La explicación sobre esta independencia es debido a que una opción es simplemente un **valor derivado** (corto: derivado), el cual no posee de una vida propia, sino que depende exclusivamente de los precios de las acciones (es por eso que **derivado = deducido**). Si el precio de las acciones es fijado al principio del período y si también existe una claridad en cuanto a sus posibles valores futuros (los factores de propagación u y d son conocidos), entonces el precio de la opción está completamente definido. La determinación previa de que el precio de una opción es independiente de la probabilidad p, es sin embargo válida para el precio de la acción. Después de todo, ¿por qué debería el precio actual de la acción p_1 coincidir con una remuneración esperada, si únicamente se tiene como información que se ha dado una igual estimación de la probabilidad p para un aumento en el precio? Es el mismo problema que para una opción. Sin embargo, en este caso, la idea tiene un carácter menos paradójico. Si nuestra estimación personal sobre el valor de la acción es más alta que el precio del mercado p_1, entonces podemos juzgar dicha compra como un buen negocio. En caso contrario, diremos lo opuesto. Además, el procedimiento previo para la evaluación de una opción, es lo único que es consistente con los precios de las acciones dadas en el mercado. Después de todo, para los precios de las acciones es válida la relación.

$$p_1 = E_Q\left(e^{-rT} \cdot P(T)\right),$$

donde adicionalmente existe disparidad en la aplicación de cualquier otra medida de la probabilidad. Es de acuerdo a estos razonamientos que la medida de probabilidad Q, es la que medida que el mercado utiliza para la evaluación de sus acciones.
(→Ej.6.9, Ej.6.10)

El precio de un call europeo en un modelo binomial de n-períodos

Como siguiente paso observaremos el modelo binomial de n-períodos, el cual es también conocido como modelo de Cox-Ross-Rubinstein y que fue definido ya en la sección 6.7, haciendo uso de los parámetros u y d y la condición usual

$$d < e^{r \cdot T/n} < u \,, \qquad (**)$$

que es equivalente a asegurar la libertad de arbitraje en el mercado. Demostraremos la forma de calcular los precios de las opciones en el modelo binomial de n-períodos, en el ejemplo de un modelo con dos períodos. Aquí nuevamente contaremos con una opción a evaluar, la cual tiene un premio de la forma $B(P(T))$, es decir donde el pago de liquidación es una función del precio final de la acción.

Si analizamos un período antes del vencimiento de ésta, o sea entre la situación up_1 o dp_1, entonces podríamos, con ayuda de los resultados del modelo de un período, en especial con el último teorema, calcular los precios de las opciones individuales. Este es desde nuestro punto de vista aleatorio, debido a que no sabemos en cual de los dos estados nos encontramos en el momento en el tiempo $T/2$. Es así como hemos logrado reducir el problema de la evaluación de opciones de dos períodos, a un problema que requiere de un modelo binomial de un período y cuyos valores son conocidos en el período de tiempo $T/2$. Este problema se deja entonces resolver con nuestros resultados del caso de un solo período y es así como en forma **contraria** o **al revés** nos es posible trabajar sobre modelos más grandes, haciendo que se **retroceda** cada vez un período y formar así de un árbol de n-períodos, con varios árboles más pequeños de un período (**principio de inducción contraria**).

Para el caso de un call europeo con precio strike K se obtiene así una fórmula explícita, la cual podemos demostrar mediante inducción:

Teorema: "Precio de un call en un modelo binomial"

Con la suposición (**) y $u^n p_1 > K$, el precio $p_{Call,n}$ de un call europeo con precio strike $K \geq 0$ en un modelo binomial de n-períodos viene dado por la siguiente fórmula:

(**CP**)
$$p_{Call,n} = p_1 \cdot N(a;n,\hat{q}_n) - e^{-rT} \cdot K \cdot N(a;n,q_n)\,,$$

donde

$$q_n = \frac{e^{r \cdot T/n} - d}{u - d}\,, \quad \hat{q}_n = \frac{q_n u}{e^{r \cdot T/n}}\,, \quad N(a;n,z) = \sum_{i=a}^{n} \binom{n}{i} z^i (1-z)^{n-i}$$

y a es el valor más pequeño entre $\{0, 1,..., n\}$ y donde además se tiene que

$$u^a d^{n-a} p_1 > K \;.$$

Demostración:

Llevamos a cabo una demostración por inducción completa sobre los n períodos del modelo binomial.

$n=1$: La conclusión se deduce directamente del teorema sobre los precios de las opciones en el modelo de un período, si se elige $B(p(T))=(p_1-K)^+$. (→Ej.6.11)

$(n-1) \Rightarrow n$:

Para empezar, denotamos a $p_{Call,n-1}(u)$ y $p_{Call,n-1}(d)$ como abreviaturas para los precios de un call, cuando el precio de la acción en el tiempo $1 \cdot T/n$ (o sea, después de un período) haya subido o caído. Para el cálculo de estos precios es posible hacer uso de la fórmula (**CP**) en el paso inductivo, ya que $n-1$ períodos siguen estando y por consiguiente del punto inicial hasta el punto en el tiempo T/n hay únicamente un árbol binomial de $n-1$-períodos. Si realizamos las siguientes substituciones en la fórmula (**CP**)

$$p_1 \to \hat{p}_1 = up_1, \quad T \to \hat{T} = \frac{n-1}{n} \cdot T$$

y observamos que

$$q_{n-1} = \frac{e^{r\frac{n-1}{n}T/(n-1)} - d}{u-d} = q_n, \qquad \hat{q}_{n-1} = \frac{q_{n-1}u}{e^{r\frac{n-1}{n}T/(n-1)}} = \hat{q}_n$$

son relaciones válidas, obtenemos por inducción (nótese que el precio inicial de la acción es up_1)

$$p_{call,n-1}(u) = up_1 N\left(a(n-1,u); n-1, \hat{q}_n\right) - Ke^{-r\frac{n-1}{n}T} N\left(a(n-1,u); n-1, q_n\right),$$

donde $a(n-1, u)$ es el número más pequeño a en $\{0, 1,..., n-1\}$ para el cual se cumple que

$$u^{a+1} d^{n-1-a} p_1 > K .$$

En ese momento nos aprovechamos de que sabemos que en el primer período sucede un crecimiento en el precio de las acciones. De forma análoga obtenemos

$$p_{call,n-1}(d) = dp_1 N\left(a(n-1,d); n-1, \hat{q}_n\right) - Ke^{-r\frac{n-1}{n}T} N\left(a(n-1,d); n-1, q_n\right),$$

donde $a(n-1, d)$ es el número más pequeño a en $\{0, 1,..., n-1\}$ para el cual se cumple que

$$u^a d^{n-a} p_1 > K ,$$

si dicho número existe. Si se da el caso que $a=n-1$ y la desigualdad $u^a d^{n-a} p_1 \leq K$ se cumple, entonces se tiene que

$$p_{call,n-1}(d) = 0 ,$$

lo cual concuerda con (**CP**), debido a que el sumatorio en los N-términos es igual a cero. Para poder mantener el precio del call en el tiempo t=0, podemos aplicar ahora el teorema sobre la evaluación de opciones en el modelo binomial de un período, de tal forma que identificamos el call con una opción con vencimiento en T/n y pago final igual a

$$B\left(P\left(T/n\right)\right) = \begin{cases} p_{Call,n-1}(u), & si \quad P\left(T/n\right) = up_1 \\ p_{Call,n-1}(d), & si \quad P\left(T/n\right) = dp_1 \end{cases} .$$

Esto es posible debido a que los precios del call son conocidos en ambos posibles estados en el momento T/n. Desarrollando y simplificando los cálculos, éstos se pueden resumir en:

$$\begin{aligned} p_{call,n} &= e^{-rT/n}\left(q_n p_{Call,n-1}(u) + (1-q_n) p_{Call,n-1}(d)\right) \\ &= p_1 \cdot \left[\hat{q}_n N\left(a(n-1,u), n-1, \hat{q}_n\right) + (1-\hat{q}_n) N\left(a(n-1,u), n-1, \hat{q}_n\right)\right] \\ &\quad -Ke^{-rT}\left[q_n N\left(a(n-1,u), n-1, q_n\right) + q_n N\left(a(n-1,d), n-1, q_n\right)\right] . \end{aligned}$$

La proposición queda entonces demostrada si es posible mostrar que para valores arbitrarios de q, $0 < q < 1$, se cumple que

$$N(a,n,q) = qN\left(a(n-1,u), n-1, q\right) + qN\left(a(n-1,d), n-1, q\right).$$

Para ello, nótense las siguientes relaciones conocidas y fáciles de observar (ver también el capítulo 2)

$$\binom{n}{i}=\binom{n-1}{i-1}+\binom{n}{i-1}, \quad \binom{n}{n}=\binom{n-1}{n-1}=1 \ , \quad n\in IN, \ \ 0\le i<n \ ,$$

$$a=a\left(n-1,d\right)=a\left(n-1,u\right)+1, \quad n\in IN \ ,$$

donde a está definida como en la proposición. Así se obtiene:

$$qN\left(a\left(n-1,u\right),n-1,q\right)+qN\left(a\left(n-1,d\right),n-1,q\right)=$$

$$=q\sum_{i=a\left(n-1,u\right)}^{n-1}\binom{n-1}{i}q^i\left(1-q\right)^{n-1-i}+\left(1-q\right)\sum_{i=a\left(n-1,d\right)}^{n-1}\binom{n-1}{i}q^i\left(1-q\right)^{n-1-i}$$

$$=\sum_{i=a\left(n-1,u\right)}^{n-1}\binom{n-1}{i}q^{i+1}\left(1-q\right)^{n-1-i}+\sum_{i=a\left(n-1,d\right)}^{n-1}\binom{n-1}{i}q^i\left(1-q\right)^{n-i}$$

$$=\sum_{i=a\left(n-1,u\right)+1}^{n}\binom{n-1}{i-1}q^i\left(1-q\right)^{n-i}+\sum_{i=a\left(n-1,d\right)}^{n-1}\binom{n-1}{i}q^i\left(1-q\right)^{n-i}$$

$$=\sum_{i=a}^{n}\binom{n}{i}q^i\left(1-q\right)^{n-i}=N(a,n,q)\ ,$$

con lo que todas las proposiciones quedan mostradas.

<u>Nota sobre la “medida neutral al riesgo”</u>

La forma de representar el precio de un call como fue descrito anteriormente se apoya en la fórmula de Black-Scholes, en el modelo de tiempo continuo. Esto se hizo intencionalmente debido a que en el siguiente capítulo deduciremos la fórmula de Black-Scholes de la fórmula binomial. Nuevamente se observa como con el teorema en el caso del período simple, el precio de un call en el modelo binomial, coincide con el precio “natural” (es decir, la remuneración pagada con intereses), si se hace uso de la medida neutral al riesgo Q, la cual está completamente determinada al considerar un aumento en el precio de la acción. Esto se puede observar por la idéntica probabilidad q_n representada por cada nodo del árbol, como fue descrito en el teorema anterior. Es posible mostrar (y se recomienda como ejercicio), que la fórmula descrita previamente (**CP**) tiene la siguiente descripción equivalente para representar el precio de un call:

$$p_{Call,n}=e^{-rT}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}{q_n}^i\left(1-q_n\right)^{n-i}\left(u^i d^{n-i}p_1-K\right)^+$$

$$=E_Q\left(e^{-rT}\left({S_n}^{(n)}P\left(T\right)-K\right)^+\right).$$

En particular se obtiene aquí la interpretación de $N(a;n, qn)$

$$N\left(a;n,q_n\right)=Q\left(P\left(T\right)>K\right),$$

como la probabilidad neutral al riesgo de obtener una remuneración positiva, adquirida por la posesión de un call.

El precio de un put europeo en el modelo binomial de n-períodos

Para el put europeo obtenemos mediante una demostración análoga, un resultado parecido al anterior teorema:

Teorema: "Precio de un put en el modelo binomial general"
Con las condiciones (**) y $d^n p_1 < K$ el precio $p_{Put,n}$ de un put con precio base $K > 0$ en el modelo binomial de n-períodos viene dado por la siguiente fórmula:

(**PP**) $$p_{put,n} = Ke^{-rT}\left[1 - N\left(a; n, q_n\right)\right] - p_1 \cdot \left[1 - N\left(a; n, \hat{q}_n\right)\right],$$

donde

$$q_n = \frac{e^{r \cdot T/n} - d}{u - d}, \quad \hat{q}_n = \frac{q_n u}{e^{T/n}}, \quad N\left(a; n, z\right) = \sum_{i=a}^{n} \binom{n}{i} z^i \left(1 - z\right)^{n-i}$$

y a es el número más pequeño en $\{0, 1, ..., n\}$ y para el cual se cumple que

$$u^a d^{n-a} p_1 > K.$$

Algoritmo para el cálculo de los precios de una opción general en el modelo binomial

En forma similar como la demostración del teorema sobre el precio de una opción para un call europeo, es posible mostrar que para cada opción se cumple que en el modelo binomial el precio de la opción se obtiene como un valor esperado de los pagos incluyendo intereses (con respecto a la medida neutral al riesgo Q), como resultado de la optimización. (El inicio de la inducción para el caso $n = 1$ es precisamente el enunciado del teorema en el modelo de un único período.) Este resultado es válido para cualquier modelo de un mercado de valores completo.
En un mercado completo y en particular en un modelo binomial de n-períodos se obtiene a partir de ello un simple algoritmo para la determinación del precio de una opción. La base de este algoritmo es el principio de inducción inversa. Para ello, se deben observar los siguientes hechos:

- El precio de la opción en T coincide con el pago final de la opción en dicho estado.
- El precio de la opción en cada "nodo del árbol" se obtiene a partir de los precios de las opciones, evaluado con intereses de acuerdo a $e^{-rT/n}$ en los subsiguientes dos nodos, los cuales tienen los pesos q y $1-q$ respectivamente.

El funcionamiento del algoritmo se ilustrada en el diagrama 6.10 para un modelo binomial de dos períodos y un put con un precio strike de K=100. De entre los movimientos de precios (ya sea un crecimiento de un 20% o una caída de 10%) y de una tasa de interés sin riesgo de r = 0.1, se obtiene q=(e^{0,1}–0,9)/(1,2–0,9)≈0,684, que es la probabilidad neutral al riesgo de obtener una ganancia en el precio de la acción en cada nodo. Los precios de la opción en cada nodo del árbol se dejan representar a partir del algoritmo mencionado arriba y éstos se encuentran anotados, en el diagrama, por encima de los precios de las acciones en cada nodo del árbol.

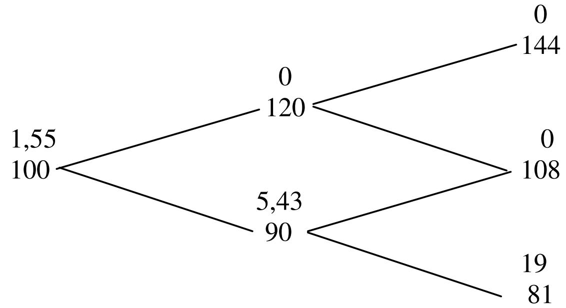

Diagrama 6.10 *Precio de un put europeo*

Obsérvese en particular que un algoritmo como éste es ideal para ser programado. Además, se adecua para el cálculo de precios de opciones con pagos más complejos que el de un simple put.

<u>Evaluación de una opción americana en el modelo binomial</u>

Hasta el momento hemos observado opciones europeas dentro del marco del modelo binomial. A diferencia de una opción europea, en el caso de una opción americana, es posible hacer uso del derecho sobre la opción en cualquier momento hasta la fecha de vencimiento. Suponiendo que el dueño de una opción hará uso de su derecho únicamente si obtiene una remuneración (el **valor interno de una opción**), que fuese más alta que el precio de la opción si sobre ésta no se ejerciese dicho derecho. Es decir, se estarán realizando comparaciones entre el valor interno y el valor restante de la opción. Esto conlleva a una metodología bastante sencilla para el cálculo del precio de una opción americana dentro del modelo binomial, haciendo uso de la inducción inversa previamente descrita para profundizar en la comparación con el valor interno. Nos es posible considerar de los siguientes hechos:

- El precio de la opción en la fecha de vencimiento T coincide con la remuneración de la opción en su actual estado.
- El precio de la opción en cada "nodo del árbol" se obtiene a partir del máximo entre el valor interno y el precio de las opciones, evaluado con intereses de acuerdo a $e^{-rT/n}$ en los subsiguientes dos nodos y con los pesos q y $1-q$ respectivamente.

El último hecho significa que vamos a hacer uso del derecho sobre la opción precisamente en el momento en el que el valor interno sea mayor que el valor de la opción, al no hacer uso del derecho sobre ella. El algoritmo se ilustra en el diagrama 6.11 con los mismos valores que en el diagrama 6.10. Sin embargo, en esta ocasión estamos evaluando un put americano y por consiguiente debemos considerar el valor interno de la opción en cada uno de los nodos del árbol.

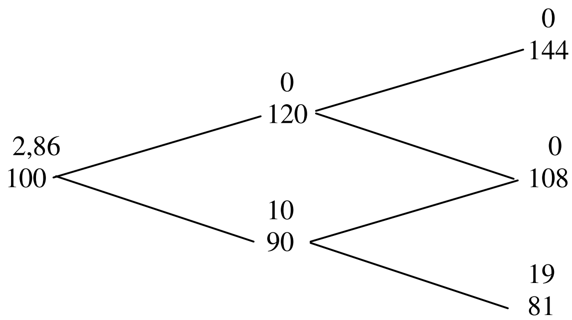

Diagrama 6.11 *Precio de un put americano*

Si comparamos los diagramas 6.10 y 6.11 nos damos cuenta que para el put americano, la decisión optima es la de hacer uso del derecho en tanto el valor interno sea positivo, es decir en tanto el precio de las acciones bajan a valores menores de 100. Por otro lado, en el caso del put europeo, dicho derecho no puede ser utilizado en el periodo de tiempo T=1, que es cuando el precio baja a 90, debido a que sólo esta permitido hacer uso del derecho hasta en el periodo T=2. Es por eso que se observa un precio mayor para el put americano en los periodos t=0,1.

Ejercicios de repaso

Ej.6.9 a) Calcule el precio de un call europeo en un modelo binomial de un periodo con p=0.7, d=0.9, u=1.1, tasa de interés r=0.05, T=1/4, precio inicial de la acción p_1=100 y precio strike K=105.
b) Calcule el precio de un put europeo en un modelo binomial de un periodo con p=0.7, d=1.1, u=1.5, tasa de interés r=0.09, T=2, precio inicial de la acción p_1=100 y precio strike K=110.
Ej.6.10 a) Calcule el precio de una opción la cual le rinde en T la cantidad $(P(T) - K)^+/P(T)$. Observe para ello un modelo binomial de un periodo con p=0.5, d=0.9, u=1.1, tasa de interés r=0.05, T=1/4, precio inicial de la acción p_1=100 y precio strike K=105.
b) Calcule el precio de una opción la cual le rinde una cantidad de 1 en T si se cumple que $P(T)> K$ y que no le rinde nada en caso contrario (este tipo de opciones son conocidas como call-digital o call-todo-o-nada). Observe para ello un modelo binomial de un periodo con p=0.5, d=0.9, u=1.1, tasa de interés r=0.02, T=1/4, precio inicial de la acción p_1=100 y precio strike K=105.
Ej.6.11 Muestre el inicio del proceso de inducción en la demostración de la fórmula para determinar el precio de un call europeo en el modelo binomial de n-periodos, a través del cálculo exhaustivo de la fórmula.

6.7 Continuación de la conversación: evaluación de opciones en todo momento

No, los cuatro consultores no se encuentran aún en la compañía de productos para el cabello Estrella S.A. En vista de que al parecer en el día de hoy no podrán avanzar muy rápido en la carretera, aprovechan los últimos momentos para desviarse a un motel y poder pasar allí la noche. Ellos tuvieron un poco de más suerte que el coche que venía detrás de ellos, puesto que nuestros amigos consiguieron los dos últimos cuartos dobles. Debido a que con tanta nieve no es posible hacer mucho, han decidido los cuatro ponerse a jugar Monopoly. Para sorpresa de todos, ¡Selina metió el juego junto a las demás maletas!

Selina: ¡Sí, La Calle Alcalá me pertenece! ¡Oliver, me debes pagar 50€!

Oliver: Pues, lamentablemente sólo tengo 12€.

Selina: Entonces dame, en lugar de eso, la Puerta del Sol.

Nadine: Selina, eso no es justo, la Puerta del Sol vale más de 50€.

Sebastián: Oliver, véndele a Selina simplemente una opción sobre tu dinero después de una vuelta, digamos con un precio strike de 100€.

Nadine: ¡Eso no esta permitido!

Selina: Y a mí de todas formas no me queda claro, qué ganaría yo con eso.

Sebastián: Oliver completará pronto una vuelta y recibirá 200€. Gracias a sus dos estaciones obtendrá con una alta probabilidad una remuneración mayor durante esta vuelta, de tal forma que cuando complete la siguiente vuelta, tendrás la oportunidad de quedarte todo su dinero por únicamente 100€.

Selina: Suena bien, es decir, una especie de call europeo sobre el dinero en efectivo de Oliver. Pero entonces Oliver no puede adjudicarse ninguna casa en esta vuelta, para que no caiga en gastos innecesarios.

Nadine: Suena extremadamente bien. Yo creo que compraré esta opción. Estoy segura que Oliver ganará también los 10 € en la competencia del más hermoso.

Oliver: Un momento, yo soy de la opinión que los 200€ que recibiré cuando complete la segunda vuelta, me pertenecen y que debería podérmelos quedar. La única cantidad que podrás recibir, será el del dinero que tenga hasta precisamente antes de completar la vuelta por segunda vez.

Selina: Bueno, estoy de acuerdo. Ahora bien, ¿cómo evaluó esta opción? ¿Con la **fórmula Black-Scholes para calls europeos**?

$$\text{"}\textbf{precio justo del call}\text{"} = p_1 \cdot \Phi(d_1) - K \cdot e^{rT} \cdot \Phi(d_2),$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(p_1/K\right) + \left(r + \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Sebastián: Ve pues, ¡pero si te sabes la fórmula de memoria! Pero, ¿qué valor escogerás para la volatilidad σ?

Selina: Empecemos con las cosas que están claras: debido a que con la opción obtenemos, después de una vuelta, el dinero de Oliver por 100€, tenemos que el precio strike es K=100. Lo que requiero es el precio actual p_1 del bono. Oliver posee 12€, me debe 50€ y recibirá pronto 200€. Digamos entonces que el dinero en efectivo de Oliver tiene en estos momentos un valor de p_1= 162€. El parámetro r en la fórmula, denota una tasa de interés del mercado sin riesgo.

Sebastián: ¿Estás segura al respecto? ¿No es este parámetro el tipo medio de la acción?

Selina: ¡Dejad de molestarme! ¡Ahora me has confundido y todo el tiempo que me llevó aprendérmela de memoria!

Nadine: Selina, tú te acuerdas correctamente. Si uno evalúa opciones en un mercado neutral al riesgo, entonces únicamente necesitamos de la tasa de interés del mercado sin riesgo.

Selina: Como tasa de interés sin riesgo escogeré el valor usual que Monopoly utiliza para las hipotecas, es decir r=10%.

Sebastián: Y ¿qué pasa con T? El tiempo que Oliver requerirá para completar una vuelta será más o menos arbitrario.

Selina: Cuando Oliver pase por la salida por segunda vez será el momento en el que la opción vencerá. Que no se hable más. Para el periodo de tiempo de la opción, escojo T=1. Sin embargo, ¿qué hago con la volatilidad σ?

Nadine: Yo modelaría el desarrollo del precio de la disponibilidad de dinero en efectivo de Oliver de acuerdo a un movimiento geométrico browniano, con tipo medio de 10% y una volatilidad de σ=0.2.

Sebastián: ¿Repite?

Nadine: Pues si, algo así. Después de todo, es necesario modelar este valor a través de un movimiento geométrico browniano ya que de lo contrario ni siquiera nos seria permitido aplicar la fórmula de Black-Scholes.

Sebastián: Y además debería existir un valor en el mercado sin riesgo que pueda estar sujeto a una tasa de interés creciente. A los hipotecarios, sin embargo, les gusta dar las tasas de interés a una tasa constante.

Nadine: En este caso creo que no debemos ser tan estrictos, después de todo, no estamos hablando aquí del millones de euros sino que únicamente del juego de Monopoly.

Selina: Entonces, volatilidad σ=0.2. Listo. Ahora puedo calcular d_1 y d_2.

$$d_1 = \frac{\ln\left(162/_{100}\right) + \left(0,1 + \frac{1}{2}\cdot 0,04\right)\cdot 1}{0,2\cdot 1} = 3,01213, \quad d_2 = 3,01213 - 0,2\cdot 1 = 2,81213 .$$

Debido a que Φ representa la función distribución de la distribución normal, aún necesito evaluar ambos valores. ¿Tiene alguno de vosotros una tabla a la mano?

Sebastián: No, pero sí en el ordenador portátil de la compañía. Los valores son:

$$\Phi(3,01213) = 0,998703, \quad \Phi(2,81213) = 0,997539 .$$

Esto quiere decir, que la opción valdría entonces

$$162\cdot 0,998703 - 100\cdot e^{0,1\cdot 1}\cdot 0,997539 \approx 51,54 .$$

Nadine: 50€ y un poco más. Esto me parece favorable, compraré la opción. Estoy segura que Oliver tendrá en esta vuelta mucha suerte. Además, ¡así habré cubierto mi eventual visita a la Estación del Sur!

Oliver: ¿Sabéis qué? Tan fácilmente no os apoderaréis de mi efectivo. Creo que mejor cogeré una hipoteca.

Nadine: Ni lo pienses, pues allí estarías perdiendo una valiosa oportunidad de ganar el juego...

Fue así como se originó una palpitante discusión en cuánto al proceder con la insolvencia de Oliver y la forma en la que él resolvería sus deudas. ¡Lo que empezó siendo una noche fría, pasó rápidamente a ser una noche bastante candente!

Discusión 8:

- Aún queda la incógnita respecto hasta qué punto se pueden aprender fórmulas de memoria y hacer uso de ellas a ciegas. Enumere posibles puntos que pueden ser criticados durante la aplicación de la fórmula en el juego de Monopoly. ¿Por qué son aplicadas las fórmulas sin que alguien las ponga en duda? ¿Cuáles son las ventajas de este procedimiento? ¿Y las desventajas?
- Utilice usted mismo la fórmula Black-Scholes y calcule precios de opciones de acciones que aparezcan en el periódico. Analice sus resultados e intente explicar las diferencias entre éstos.

Ejercicios de repaso

Ej.6.12 Calcule con ayuda de la fórmula Black-Scholes, los precios de los siguientes calls europeos:
a) Precio actual de la acción p_1=100, tipo de retorno medio de la acción b=0.1, volatilidad σ=0.3, precio strike K=110, tasa de interés creciente sin riesgo r=0.04, T=1.
b) Precio actual de la acción p_1=100, tipo de retorno medio de la acción b=0.1, volatilidad σ=0.3, precio strike K=100, tasa de interés creciente sin riesgo r=0.04, T=1.
c) Precio actual de la acción p_1=100, tipo de retorno medio de la acción b=0.1, volatilidad σ=0.3, precio strike K=90, tasa de interés creciente sin riesgo r=0.04, T=1.
Ej.6.13 Busque en el texto a continuación la fórmula Black-Scholes para puts europeos y determine el precio de los siguientes puts:
a) Precio actual de la acción p_1=100, tipo de retorno medio de la acción b=0.1, volatilidad σ=0.2, precio strike K=100, tasa de interés creciente sin riesgo r=0.05, T=1.
b) Precio actual de la acción p_1=100, tipo de retorno medio de la acción b=0.1, volatilidad σ=0.2, precio strike K=100, tasa de interés creciente sin riesgo r=0.09, T=1.

c) Precio actual de la acción p_1=100, tipo de retorno medio de la acción b=0.1, volatilidad σ=0.2, precio strike K=100, tasa de interés creciente sin riesgo r=0.02, T=1.

Ej.6.14 En caso que usted haya calculado todos los ejercicios en Ej. 6.12 y 6.13, observe nuevamente en forma más detallada los resultados que obtuvo. ¿De qué forma es posible que el precio de la opción dependa del precio strike? ¿Qué influencia tiene la tasa de interés sin riesgo sobre el precio de la opción?

6.8 Fundamentos matemáticos: la fórmula Black-Scholes para calls y puts europeos

El modelo de mercado

La fórmula Black-Scholes para la evaluación de calls y puts europeos es el hecho más sobresaliente de la matemática financiera moderna. Su importancia tanto para la teoría como en la práctica fue enfatizada a través de la entrega del premio Nóbel a Robert Merton y Mirón Scholes por sus contribuciones a la fórmula Black-Scholes (ver Black y Scholes (1973), Merton (1973)) en el año 1997. Fischer Black no tuvo la oportunidad de vivir tal honor, puesto que él falleció en 1995.

El modelo de bonos descrito en mayor detalle en la sección 6.7, forma la base de la fórmula Black-Scholes y éste a su vez se basa en las siguientes asunciones: la existencia de un mercado en el que se encuentra una cantidad de dinero a plazo fijo sujeto a una tasa de interés r (y pago de interés continuo) y una acción con un tipo de retorno medio b y volatilidad σ. Como se describió en la sección 6.7, los precios de los bonos respectivos vienen dados por

$$P_0(t) = e^{rt}\,, \quad P_1(t) = p_1 e^{\left(b - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)}\,,\ t \in [0,T]$$

donde r, b y σ representan valores reales fijos.

Notas:

La metodología matemáticamente correcta para la deducción de la fórmula Black-Scholes se encuentra dentro del marco que hemos presentado, la aplicación del principio de la réplica (ver por ejemplo Korn y Korn (1999)). Black y Scholes (1973) escogieron otra metodología: ellos transformaron un problema de Cauchy, es decir resolvieron el problema de la evaluación de opciones mediante la solución de una ecuación diferencial parcial de segundo orden, con condiciones de frontera). Con ayuda de la estrategia de duplicación se obtiene que el precio de la opción es el valor esperado de la remuneración de la opción sujeta a intereses, si en el modelo anterior se supone que

$$b = r.$$

Esta suposición tiene como consecuencia que el precio de la acción $P_1(t)$ se desenvuelva como un plazo fijo sin riesgos. En la realidad, esto es nuevamente equivalente con la transición hacia la evaluación con una medida neutral al riesgo, en total analogía con los resultados del modelo binomial (ver el capítulo III en Korn y Korn (1999)). Una representación exacta bajo las actuales circunstancias no es, sin embargo, posible de ejecutar con las herramientas puestas a disposición en este capítulo.

Deducción heurística de la fórmula Black-Scholes

Observaremos una serie de modelos binomiales de n-períodos, los cuales convergen con los precios previos en el modelo Black-Scholes al suponer que b=r. Lo primero de lo que nos damos cuenta es que en ambos modelos, el desarrollo de los bonos sujetos a una tasa de interés fija y sin riesgo, son idénticos. Para aproximar el precio de las acciones en el modelo Black-Scholes,

$$P_1(t) = p_1 \cdot e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma W(t)}$$

escogemos nuevamente (ver capítulo 6) la serie de modelos binomiales descrita por

$$u_n = \exp\left(\tilde{r}\cdot\Delta t + \sigma\cdot\tfrac{1-p}{\sqrt{p(1-p)}}\cdot\sqrt{\Delta t}\right), \qquad d_n = \exp\left(\tilde{r}\cdot\Delta t - \sigma\cdot\tfrac{p}{\sqrt{p(1-p)}}\cdot\sqrt{\Delta t}\right)$$

y donde $\tilde{r} = r + \frac{1}{2}\sigma^2$, $\Delta t = T/n$ y $p\in(0,1)$. Es posible mostrar con ayuda del teorema de de Moivre-Laplace que los precios de las acciones en los modelos binomiales

$$P_1^{(n)}(T) = p_1\cdot\exp\left(X_n\cdot\ln\left(\tfrac{u_n}{d_n}\right) + n\cdot\ln(d_n)\right)$$

tienen para $n\to\infty$ la misma distribución que $P_1(T)$. Es posible (con un poco de álgebra) verificar que las sucesiones correspondientes de los precios de las opciones call convergen al precio de un call en el modelo de Black-Scholes, siendo estos precios

$$E\left(e^{-rT}\left(p_1\cdot e^{\sigma W(T)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T} - K\right)^+\right).$$

En el momento de calcular este valor esperado, se obtiene:

Teorema: "La fórmula Black-Scholes"
a) El precio de un call europeo p_{Call} con precio strike K y duración hasta la fecha de vencimiento T viene dada en el modelo Black-Scholes por

$$p_{Call} = p_1\cdot\Phi(d_1) - K\cdot e^{rT}\cdot\Phi(d_2)$$

donde Φ es la función distribución de la distribución normal estandarizada y donde d_1, d_2 vienen dados por

$$d_1 = \frac{\ln\left(p_1/K\right) + \left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}\,.$$

b) El precio de un put europeo p_{Put} con precio strike K y duración hasta la fecha de vencimiento T viene dada en el modelo Black-Scholes por

$$p_{Put} = K\cdot e^{rT}\cdot\Phi(-d_2) - p_1\cdot\Phi(-d_1)$$

donde Φ, d_1 y d_2 están definidas como en el inciso a).

Nota

La fórmula Black-Scholes puede ser aproximada en forma muy eficiente por las fórmulas en los teoremas sobre el precio de calls y puts del modelo binomial de n-períodos, dado el hecho que $n \geq 30$ y que u,d sean elegidos como en la descripción anterior.

Demostración de la fórmula Black-Scholes (sólo para el caso de un call europeo)

Supóngase que σ es un valor positivo. El caso de un valor negativo para σ es similar. De acuerdo al enunciado, es necesario calcular el siguiente valor esperado:

$$E\left(e^{-rT}\left(p_1\cdot e^{\sigma W(T)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T} - K\right)^+\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} \left(p_1 e^{\sigma x + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T} - K \right)^+ e^{-\frac{x^2}{2T}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{c}^{\infty} e^{-rT} \left(p_1 e^{\sigma x + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T} - K \right) e^{-\frac{x^2}{2T}} dx,$$

donde el valor de c, viene dado por

$$c = \frac{\ln\left(K/p_1 \right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)T}{\sigma}.$$

Ahora es posible resolver la resta en la integral y calcular las dos integrales resultantes.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{c}^{\infty} e^{-rT} p_1 e^{\sigma x + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T} e^{-\frac{x^2}{2T}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{c}^{\infty} p_1 e^{-\frac{(x+\sigma T)^2}{2T}} dx$$

$$= p_1 \cdot \Phi\left(-\frac{c+\sigma T}{\sqrt{T}} \right) = p_1 \cdot \Phi\left(\frac{\ln\left(p_1/K \right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2 \right)T}{\sigma\sqrt{T}} \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{c}^{\infty} e^{-rT} K e^{-\frac{x^2}{2T}} dx = e^{-rT} K \cdot \Phi\left(-\frac{c}{\sqrt{T}} \right) = e^{-rT} K \cdot \Phi\left(\frac{\ln\left(p_1/K \right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)T}{\sigma\sqrt{T}} \right)$$

De esto se concluye la suposición. □

Notas

1. Existencia de una estrategia de réplica
Es posible mostrar que el modelo Black-Scholes previamente descrito compuesto de una inversión sin riesgo y de una acción, es completo. Esto garantiza que tanto para el call europeo como para el put europeo existe una estrategia de réplica (ver Korn y Korn (1999)). También garantiza la unicidad de los precios de las opciones para los puts y calls.
2. Independencia del tipo de retorno
El motivo decisivo para aceptar la fórmula Black-Scholes en la práctica es la independencia del precio de la opción del tipo de retorno b de la acción, lo que a la vez traza una analogía a la independencia del precio de un call respecto a *p* en un modelo binomial. La tasa de interés fija r se puede observar directamente en el mercado, la volatilidad σ puede ser estimada de forma adecuada de los datos. Es un hecho que le sería difícil a dos inversionistas ponerse de acuerdo sobre un tipo de retorno b. Es éste el motivo por el cual para la mayoría de gente, una fórmula para el precio de las opciones basada en teorías científicas y en la que además no apareciese este parámetro de discordia, sería naturalmente un resultado bienvenido.
3. Determinación del precio y medida neutral al riesgo
La elección de $b=r$ para la determinación del precio en el modelo Black-Scholes corresponde al cálculo del valor esperado, sujeto a intereses de la remuneración de la opción con respecto a la (única) medida neutral al riesgo, debido a que para $b=r$, tanto bonos como acciones se desarrollan de una misma forma. A diferencia del modelo binomial en donde esta medida viene dada explícitamente por las probabilidades $q_{n,}$, en este caso juega únicamente un papel secundario (precisamente en la suposición que $b=r$). Sin embargo, para todas las opciones europeas con remuneración B, las cuales dependen del desarrollo de los precios en el intervalo de tiempo $[0,T]$, se tiene que

$$p_B = E\left(e^{-rt} B \right)$$

donde p_B describe el precio actual de las opciones.

6.9 Fundamentos matemáticos: simulación de precios de opciones con ayuda de métodos de Monte-Carlo, en especial para opciones exóticas

Cálculo del precio de opciones mediante el método de Monte-Carlo

Los precios de las opciones se obtienen siempre a partir de valores estimados. Esto quiere decir que todos los métodos que son adecuados para calcular valores esperados, son métodos potenciales para calcular los precios de opciones. En este contexto, la metodología más popular es el **método de Monte-Carlo**, el cual tiene una base estocástica. Se basa en el hecho que un valor esperado se obtiene a partir de valor medio obtenido en teoría, de realizar una prueba aleatoria infinitas veces. Matemáticamente se precisa esta idea a través de la ley fuerte de los grandes números, la cual presentamos aquí de una forma bastante simple:

Teorema: Ley fuerte de los grandes números
Sea X_1, X_2,... una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con

$$\mu = E(X_1) < \infty \,,$$

las cuales están definidas en un mismo espacio de probabilidad (Ω, F, P). Entonces se cumple que:

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega \;\middle|\; \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) = \mu\right\}\right) = 1\,.$$

Este teorema indica que para todos los valores ω (excepto los elementos de un conjunto con probabilidad cero), la serie $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega)$ converge al valor esperado μ, y se puede suponer que para valores lo suficientemente grandes de n, se obtiene una buena aproximación para $E(X_1)$. La consecuencia de la ley fuerte es el siguiente algoritmo:

Algoritmo: **"Método Monte-Carlo"** – Cálculo aproximado de un valor esperado $E(X)$ de variables aleatorias X

1. Paso: Simule suficientes pruebas aleatorias con la misma distribución que la variable aleatoria X, para obtener los resultados $X_1(\omega)$,..., $X_n(\omega)$.

2. Paso: Calcule $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega)$ y utilícelo como aproximación para $E(X)$.

El primer paso significa que con ayuda de un ordenador, se deben generar n números aleatorios X_1,..., X_n, donde las X_i son independientes y poseen la misma distribución como X y además el valor de n tiende a un número muy grande.
Es así como uno "deja" al azar el valor esperado, repitiendo la prueba las veces que sean necesarias. En el momento que asociamos al experimento el nombre de **Monte-Carlo**, estamos a la vez describiendo que nuestro resultado lo obtendremos con ayuda del azar.

Debemos contestar a las siguientes preguntas:
- ¿Cómo obtengo los números aleatorios adecuados?
- ¿Cómo de grande debe ser n, el número de repeticiones del experimento, para que la aproximación del valor esperado sea lo suficientemente exacta?

La generación de números aleatorios adecuados fue descrita en la sección 5.8. Para responder a la segunda pregunta, nos fijaremos en el teorema central del límite, el cual sólo habíamos presentado aquí como un caso de especial del teorema de de Moivre-Laplace. De éste se deduce que para un valor de n lo suficientemente grande,

$$\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_n \text{ está distribuido como } N\left(\mu,\sigma^2/n\right),$$

si además, de las suposiciones previas, se tiene que $\sigma^2 := Var(X) < \infty$, se puede observar claramente que aún al realizar n repeticiones varias veces, por lo general se van a obtener resultados diferentes, debido a que se estará tratando con un sumatorio de números aleatorios. Además, debido a la desviación estándar (aproximada), se tiene un intervalo de confianza en función de n: $1/\sqrt{n}$. Esto quiere decir que para aumentar la exactitud (media) del **aproximante de Monte-Carlo** (o sea, de la media aritmética) por diez veces, será necesario aumentar por cien veces la cantidad de números aleatorios generados. Existe por lo tanto una convergencia un tanto lenta de la media aritmética hacia el valor esperado y esto se muestra en el siguiente diagrama, en donde el valor esperado de 0 de una variable aleatoria distribuida $N(0,1)$, es aproximado mediante un método de Monte-Carlo y repetido para diferentes valores de *n*.

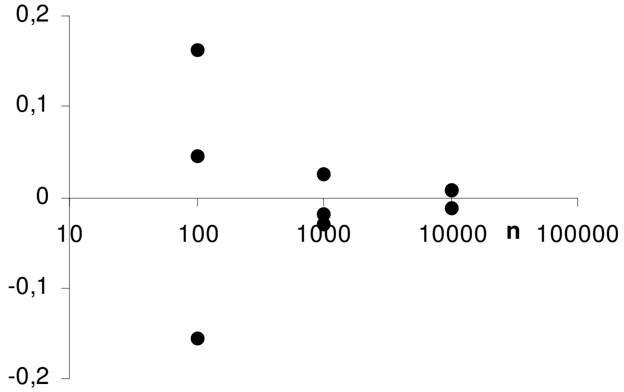

Diagrama 6.12 *Exactitud de los aproximantes de Monte-Carlo*

En este diagrama, para los diferentes valores de $n = 100,\ 1000,\ 10\ 000$, se construyeron tres grupos diferentes de variables aleatorias, para los cuales se calcularon las respectivas medias aritméticas. Dicho resultado fue posteriormente añadido al diagrama 6.12 y se observa claramente que para los valores de $n = 100$ repeticiones, los resultados muestran una desviación desde 0.16 hasta –0.15. Para el caso de n = 10 000 esta desviación va desde 0.01 hasta –0.01, es decir que en efecto hubo una mejora de un factor 10. A partir del diagrama se observa claramente que es necesario considerar valores de n que se encuentren al rededor de $10\ 000$. En general, se debería hacer el cálculo preferiblemente, en caso de duda, con una cantidad más grande de números aleatorios. Lógicamente el tiempo requerido para los cálculos se incrementará.

<u>Implementación del método de Monte-Carlo para el cálculo de un call europeo</u>

Si bien ya conocemos la fórmula Black-Scholes para la determinación del precio de un call europeo, queremos aplicar el método de Monte-Carlo para una determinación aproximativa del precio de una opción y así mostrar su aplicabilidad. A modo de recordatorio, para la determinación del precio de una opción es necesario calcular el valor esperado de la remuneración B de la opción en un mercado neutral al riesgo

$$E\left(e^{-rT}\left(p_1 \cdot e^{\sigma Z+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T}-K\right)^+\right),$$

donde Z es una variable aleatoria normalmente distribuida y donde se cumple que $Z \sim N(0,T)$.
Para la determinación aproximativa del precio de la opción, procedemos de la siguiente manera:
1. Paso: Generamos n variables aleatorias X_i, independientes y distribuidas normalmente. Es así como se tiene que

$$Z_i = \sqrt{T} \cdot X_i$$

está distribuido $N(0,T)$. Con ello calculamos n-veces el precio final de la acción, donde podemos elegir la tasa de interés sin riesgo r, debido a que hemos elegido ejecutar el cálculo del precio de una opción en un mercado neutral al riesgo. Esto se realiza mediante

$$P_1^{(i)}(T) = p_1 \cdot e^{\sigma Z_i+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T}.$$

2. Paso: Obtenidos los precios de la acción (en un mercado de neutral al riesgo), calculamos la remuneración de la opción mediante

$$B^{(i)} = \left(P_1^{(i)}(T)-K\right)^+.$$

3. Paso: Con los n valores simulados de la remuneración nos es posible determinar aproximadamente el precio de la opción, a través de la estimación del valor esperado, sujeto a intereses.

$$p_{Call,approx.} = e^{-rT} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} B^{(i)}.$$

El método de Monte-Carlo para el cálculo del precio de opciones exóticas

Las operaciones con contratos de opciones (y también las operaciones especulativas) se han vuelto tan populares en las últimas décadas, que la oferta y la demanda de opciones diferentes a las aquí estudiadas, han crecido enormemente hasta hoy en día. Como término general se le ha llamado a estos nuevos tipos de opciones, opciones exóticas. Además de su carácter especulativo, éstas cuentan con ventajas adicionales pero también ciertos riesgos inherentes.

i) La opción todo-o-nada

Como el nombre lo indica, el dueño de una opción todo-o-nada obtiene en la fecha de vencimiento de la opción o la cantidad máxima de remuneración (para simplificación de la descripción, llamémosle simplemente $B = 1$) o nada. En el caso del call todo-o-nada, el dueño recibe la remuneración máxima, es decir, una cantidad de dinero, si la acción sobre la cual la opción esta acuñada, tiene un precio de al menos K unidades en el día de vencimiento de la opción. En caso contrario, el dueño de la opción no recibirá nada. En el caso del put todo-o-nada, sucede exactamente lo contrario. El dueño de la opción obtiene una suma de dinero si el precio de la acción en el día de vencimiento de la opción se encuentra por debajo de un precio K, en caso contrario no sucede ningún pago. Las características especiales de estas opciones todo-o-nada, en relación a los puts y calls hasta el momento descritos, son las siguientes:

- remuneración no creciente,
- la remuneración final puede alcanzar únicamente dos valores: 0 ó 1.

Con ayuda del principio de evaluación descrito en el apartado anterior, es ahora relativamente fácil determinar los precios de las opciones todo-o-nada, con ayuda del modelo Black-Scholes. Se tiene que:

$$p_{todo-o-nada-call} = Q\left(P_1(T) \geq K\right), \qquad p_{todo-o-nada-put} = Q\left(P_1(T) < K\right),$$

donde Q representa la medida neutral al riesgo. Debe observarse que el valor esperado de una variable aleatoria que sólo puede tomar los valores de 0 y 1 (y precisamente una de ellas será la remuneración de una opción todo-o-nada) es precisamente igual a la probabilidad de que ésta tome el valor de 1. De forma similar como en el caso de un put y un call europeo, es posible ahora calcular las probabilidades previas como (ver también el capítulo 4 en Korn y Korn (1999))

$$p_{todo-o-nada-call} = e^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln\left(P_1/K\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right),$$

$$p_{todo-o-nada-put} = e^{-rT}\Phi\left(-\frac{\ln\left(P_1/K\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

También aquí es posible obtener el precio de las opciones mediante el método aproximativo de Monte-Carlo. El procedimiento es análogo a la utilización del método de Monte-Carlo en el caso del call europeo y únicamente en el segundo paso es necesario darse cuenta, que esta opción tiene pagos diferentes.

<u>2. Paso del método de Monte-Carlo:</u> con los precios de la acción (en un mercado neutral al riesgo), calculamos la remuneración de la opción

$$B_{todo-o-nada-call}^{(i)} = \begin{cases} 1, & \text{si } P_1^{(i)}(T) \geq K \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases},$$

$$B_{todo-o-nada-put}^{(i)} = \begin{cases} 1, & \text{si } P_1^{(i)}(T) < K \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}.$$

<u>ii) Opciones de barrera</u>

La característica principal de una opción de barrera es que en ésta, si el precio de la acción sobrepasa barreras dadas durante el período de validez de la opción, entonces la opción se ve directamente afectada. Es así como por ejemplo en el caso de una opción de barrera knock-out, con barrera C y precio strike K, la remuneración puede ser calculada por

$$B = \begin{cases} \left(P_1(T) - K\right)^+, & \text{si } P_1(t) < C \text{ para todo } t \leq T \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}.$$

Esto quiere decir que el dueño de un call de barrera knock-out obtiene únicamente después de la fecha de vencimiento de la opción, el pago de un call normal con precio strike K, si el precio de la acción no sobrepasa nunca, durante el período del contrato de la opción, la barrera C. De sobrepasarse la barrera, el call de barrera knock-out pierde todo su valor. Es ahora muy sencillo imaginarse otras posibles variantes, como por ejemplo el **call de barrera knock-in** o el **put de barrera knock-out**. Aquí se pueden considerar tanto cotas superiores como inferiores. Existen naturalmente también opciones de barrera doble (es decir, existen a la vez barreras superiores e inferiores para el precio de la acción), las cuales son ofrecidas en diferentes variantes. La ventaja práctica de una opción de barrera consiste en que es naturalmente más barata que un put o un call similar. Sin embargo, el riesgo de no obtener ninguna remuneración al final del período es claramente mayor, en comparación a un call o un put simple.

Para opciones de barrera sencillas existen por un lado fórmulas cerradas (complicadas) para la determinación de su precio (ver el capítulo 4 en Korn y Korn (1999)). El precio de una opción de barrera doble puede ser calculado exclusivamente por métodos numéricos en forma aproximativa. Opciones de barrera presentan por lo tanto la posibilidad de regresar a una metodología de Monte-Carlo para la determinación de sus precios. La diferencia principal con los ejemplos descritos anteriormente consiste en que es necesario simular el desarrollo completo de los precios de la acción, para poder determinar la remuneración final de la opción. Esta metodología la demostraremos sobre la base de un ejemplo de una opción de barrera doble:

Paso previo: dividimos el intervalo de tiempo $[0, T]$ en m intervalos del mismo largo $[t_i, t_{i+1}]$ de tal forma que

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = T \, .$$

1. Paso: Generamos $n \cdot m$ variables aleatorias $X_{i,j}$ independientes y distribuidas normalmente. Así tenemos que

$$Z_{i,j} = \sqrt{t_j} \cdot X_{i,j}, \quad i = 1,...,n, \quad j = 1,...,m \, ,$$

esta distribuido $N(0,t_j)$. Con ello calculamos n-veces (en forma aproximada) el desarrollo del precio de la acción en el intervalo $[0, T]$ así como el precio final de la acción, en donde podemos elegir la tasa de interés sin riesgo r debido a que nuestros cálculos sobre el precio de las opciones las estamos realizando en un mercado neutral al riesgo

$$P_1^{(i)}\left(t_j\right) = p_1 \cdot e^{\sigma Z_{i,j} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t_j} \, .$$

2. Paso: Con el desarrollo del precio de la acción que fue simulado en el primer paso, calculamos la remuneración de la opción como sigue:

$$B^{(i)} = \begin{cases} \left(P_1^{(i)}(T) - K\right)^+, & \text{si } C_1 < P_1^{(i)}\left(t_j\right) < C_2 \text{ para todo } t_j, j = 0,1,...,m \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases} \, .$$

3. Paso: Con los n valores de la remuneración, nos es posible aproximar el precio de la opción, estimando el valor esperado a través de

$$p_{calldebarreradoble,aprox.} = e^{-rT} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} B^{(i)} \, .$$

Observación obtenida de la práctica: como se puede observar, el esfuerzo que hay que realizar en la programación es bastante grande y además es necesario considerar ciertos trucos particulares en cada uno de los casos. La calidad de los números aleatorios es en este caso especialmente importante: aún analizando "únicamente" 20 puntos en el tiempo, se requerirán al menos $20 \cdot 10\ 000 = 200\ 000$ números aleatorios. Esto es mucho pedir para muchos de los generadores de números aleatorios de los ordenadores. Para la implementación práctica del método de Monte-Carlo es necesario el uso de generadores de números pseudo-aleatorios adecuados. La creación y la puesta a prueba de estos generadores presenta en la actualidad un amplio campo para su investigación dentro de la rama de las matemáticas. Un problema adicional es que en este procedimiento no se simula el desarrollo completo de los precios de una acción, sino que simplemente puntos individuales. Es así como el riesgo de que la opción expire es en realidad mucho mayor. Es así como en realidad con el uso del método de Monte-Carlo se obtiene únicamente una cota inferior para el precio de una opción de barrera doble.

iii) Opciones asiáticas

Otra clase de opciones exóticas populares son las opciones asiáticas. Principalmente se trata de opciones con una remuneración que se obtiene a partir de los valores medios de los precios de la acción durante la validez de la opción. Por ejemplo,

$$B = \left(\frac{1}{T} \int_0^T P_1(t)\,dt - K \right)^+ .$$

También en este caso, la única posibilidad de obtener el precio de la opción es mediante métodos numéricos aproximativos. La aplicación del método de Monte-Carlo, sin embargo, no la describiremos aquí, ya que es necesario realizar interpolaciones sobre el desarrollo de los precios.
El objetivo de estas opciones asiáticas consiste en que en mercados con pocos participantes (por ejemplo el mercado de oro o de crudo), le sea posible a participantes individuales influenciar el precio del bien tratado en pocos días. En el caso de un call europeo esto puede tener grandes repercusiones, ya que la remuneración depende únicamente del precio del bien acuñado después de alcanzarse la fecha de vencimiento. Sin embargo, debido a que para cada participante en el mercado es difícil tener una influencia sobre algún bien durante el período de tiempo completo, se introdujeron las opciones asiáticas, en las cuales el precio del bien en cualquier instante de tiempo dentro del período de validez de la opción, considera la misma influencia sobre la remuneración final de la opción. La determinación explícita por medio analíticos del precio de una opción asiática del tipo anteriormente mencionado no ha sido lograda hasta la fecha.

iv) Opciones exóticas independientes de depósito

A diferencia de la opción todo-o-nada (la cual también es conocida como “opción digital”), la remuneración de una opción de barrera o la de una opción asiática dependen del completo desarrollo de los precios de las acciones durante el período de validez de la opción. Estas opciones son por consiguiente conocidas como opciones **camino-dependientes**. El cálculo de sus precios es visiblemente más difícil que el cálculo de los precios de opciones exóticas **camino-independientes**, en las cuales la remuneración de la opción viene dada como una función del precio de las acciones al cumplirse el período de validez de la opción. Por lo general cuando se habla de opciones exóticas camino-independientes, se habla de opciones cuya remuneración depende del precio de diferentes bonos. Un ejemplo clásico es la **opción basket**, la cual se presenta en diferentes variantes. Observaremos ahora el caso de un call-basket sobre dos acciones independientes, cuyos precios (en el mercado neutral al riesgo) cogen los siguientes valores en el tiempo T:

$$P_1(T) = p_1 \exp\left(\left(r - \tfrac{1}{2}\sigma_1^2\right)T + \sigma_1 W_1(T)\right),$$

$$P_2(T) = p_2 \exp\left(\left(r - \tfrac{1}{2}\sigma_2^2\right)T + \sigma_2 W_2(T)\right),$$

donde para las variables aleatorias independientes $W_1(T)$, $W_2(T)$ se tiene que:

$$W_1(T) \sim N(0,\ T),\quad W_2(T) \sim N(0,\ T).$$

La remuneración de un call-basket con precio strike K viene dado por:

$$B_{Basket-Call} = \left(P_1(T) + P_2(T) - K\right)^+,$$

en donde no se ha encontrado ninguna fórmula cerrada para poder determinar el precio de la opción.
La aplicación del algoritmo de Monte-Carlo es ahora bastante sencilla. Se generan los números aleatorios necesarios, se calcula la remuneración de la opción asociada y luego la media aritmética de estos valores (tomando en consideración los intereses) como una aproximación del precio de las opciones. En forma más exacta y precisa:

1. Paso: generamos un total de 2·n variables aleatorias X_i independientes y distribuidas normalmente. Así se tiene que

$$W_{1,i} = \sqrt{T} \cdot X_{2i-1}\ , \quad W_{2,i} = \sqrt{T} \cdot X_{2i}\ , \quad i = 1,\dots,n\ ,$$

son independientes y están distribuidos $N(0,T)$. Con éstos calculamos n-veces el precio final de la acción 1 y n-veces el precio final de la acción 2. Nuevamente haremos uso de la tasa de interés sin riesgo r, puesto que nuestra determinación del precio de las opciones la estamos realizando en un mercado neutral al riesgo

$$P_1^{(i)}(T) := p_1 \exp\left(\left(r - \tfrac{1}{2}\sigma_1^2\right)T + \sigma_1 W_{1,i}(T)\right),$$

$$P_2^{(i)}(T) := p_2 \exp\left(\left(r - \tfrac{1}{2}\sigma_2^2\right)T + \sigma_2 W_{2,i}(T)\right).$$

2. Paso: con estos precios finales de las acciones (en un mercado neutral al riesgo), calculamos la remuneración de la opción

$$B_{Basket-Call}{}^{(i)} := \left(P_1^{(i)}(T) + P_2^{(i)}(T) - K\right)^+ .$$

3. Paso: con los n valores correspondientes a la remuneración, nos es posible determinar aproximadamente el precio de la opción, estimando el valor esperado como sigue:

$$p_{Basket-call,aprox.} = e^{-rT} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} B_{Basket-Call}{}^{(i)} \ .$$

v) ¿Más productos exóticos?

La oferta de opciones exóticas es a la fecha tan grande que es muy fácil perder de vista a una o a otra. Además, gracias a modelos matemáticos, la variedad de estas opciones está aún en crecimiento. Por el otro lado, generalmente son las grandes compañías (o competidores del mercado), las que motivan la existencia de nuevos tipos de opciones. Es así como en el futuro habrá suficientes problemas de evaluación para matemáticos que trabajen dentro y fuera de los bancos.

6.10 Resumen

Hemos presentado las opciones en diferentes partes de este capítulo debido a que, como hemos podido ver juegan un papel muy importante en mercados financieros modernos. Para comenzar se mostró la diferencia entre los contratos forward. Posteriormente se procedió enfatizar la importancia y la utilización de opciones para causar especulación y tener que ahorrar. Matemáticamente interesante y a primera vista económicamente sorprendente, es la evaluación de opciones con ayuda del principio de la réplica. Este principio se basa en la suposición de la libertad de arbitraje del mercado. Se observaron modelos para mercados completos como por ejemplo los modelos binomiales de n-períodos o bien el modelo Black-Scholes, en donde es posible duplicar las opciones. Para calls y puts se presentaron fórmulas cerradas para la determinación de precios, las cuales no dependen de la estimación particular de los inversionistas sobre las tendencias de los precios de las acciones. Un ejemplo de éstas, es la fórmula Black-Scholes. Finalmente se presentó el método de Monte-Carlo como un mecanismo numérico sencillo para la determinación de los precios de las opciones exóticas.