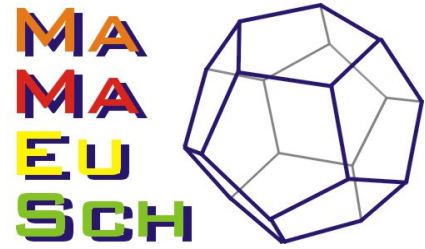


MaMaEuSch

Management Mathematics for
European Schools
<http://www.mathematik.uni-kl.de/~mamaeusch/>



¿DÓNDE SE ENCUENTRA LA LOCALIZACIÓN ÓPTIMA?

Horst W. Hamacher¹

Este proyecto ha sido desarrollado con ayuda parcial de la Unión Europea dentro del marco del programa Sócrates. El contenido no refleja necesariamente la posición de la Unión Europea ni implica ninguna responsabilidad por parte de la Unión Europea.

¹ Universidad de Kaiserslautern, Departamento de Matemáticas

CAPÍTULO 3: ¿DÓNDE SE ENCUENTRA LA LOCALIZACIÓN ÓPTIMA?

Descripción:

Referencias a la Economía:

- Elección de la localización como un criterio social y comercial
- Logística
- Incremento en la productividad
- Objetivos de la economía y su modelización
- Restricciones de la economía

Referencias a la matemática escolar:

- Mediatriz y punto medio de un segmento
- Círculo circunscrito de un triángulo
- Círculos y discos
- Determinación del tercer punto de un triángulo equilátero a partir de dos puntos
 - o Cálculo de rectas dados ciertos puntos
 - o Cálculo del punto de intersección de rectas
- Conversión de funciones de dos incógnitas en funciones de una incógnita
- Gráficas de funciones lineales por partes
- Determinación de mínimos a través de diferenciación
- Ejemplos de funciones no diferenciables
- Determinación de mínimos de funciones no diferenciables

Contenido

Manual para el capítulo 3:	3
3.1. Conversación: Planificación de posicionamiento de robots y ayuda en caso de accidentes: dos problemas en la economía completamente diferentes!?	4
3.2 Elección de la localización óptima de un helicóptero de primeros auxilios con ayuda de geometría elemental.....	5
3.3 Planificación de colocación de robots y problemas de localización discreta (median-problemas de localización).....	18
3.4 Conversación: teoría de localización como herramienta común	29
3.5 Futuras perspectivas: planificación de localización en la economía.....	32
3.6 Problemas de localización discreta (center-problemas de localización)	33
3.7 Problemas de localización con distancia rectangular	36
Apéndice: información adicional.....	39

Manual para el capítulo 3:

La teoría de localización es una de las áreas más importantes de la **logística** interna y externa. En este capítulo, en las secciones 3.1 y 3.4, los autores hacen énfasis sobre problemas como la localización de un helicóptero de primeros auxilios y la fabricación de un envase en un montaje de placas, problemas que a simple vista parecieran completamente distintos, sin embargo tienen mucho en común. Es aquí donde se muestra el poder de la **Matemática como una herramienta de modelización de problemas de la economía**. En realidad, un modelo matemático genérico se puede adherir a muchos problemas de distintas índoles.

Los métodos matemáticos que se usan en este capítulo se pueden introducir en los estudios de secundaria, tanto a nivel Básicos como en el Bachillerato. En el capítulo 3.2 y en la sección 3.3.1 se hace uso de construcciones geométricas, las cuales son estudiadas en cursos de los últimos años de Primaria y primeros años de Secundaria. Por ejemplo, la construcción de mediatrices y triángulos equiláteros conllevan a métodos para solucionar un problema de localización. En dependencia de la cantidad de locaciones a considerar y de las diferentes mediciones de distancias, es posible enseñarle a los estudiantes, cuál de los diferentes métodos de las matemáticas pueden y deben ser utilizados. Es así como en la sección 3.3.2 se le indicará a los estudiantes como hacer uso de los **criterios de máximos y mínimos** para solucionar el problema de localización con distancias euclídeas.

En las secciones 3.7 y 3.8 se ilustrará por medio de ejemplos lo que sucede al modificar condiciones de un problema económico. Por ejemplo, en caso que una región en particular presente alguna prohibición para la localización de nuevas instalaciones, es posible resolver el problema de localización, el denominado problema de localización restrictivo, haciendo uso de proyecciones. Finalmente, en la sección 3.8 se muestra que es posible aplicar los **criterios de máximos y mínimos**, aun cuando la función dada **no es diferenciable**.

La interrelación entre la matemática escolar y los problemas de la economía, además de ser enfatizada en las secciones de conversación 3.1 y 3.4, se profundiza en la sección 3.5 "Problemas de localización en la economía", en la cual se destaca la importancia de la planificación de la localización como una herramienta para la toma de decisiones y el consecuente desenvolvimiento.

Todos los diagramas de este capítulo se pueden encontrar en el CD adjunto como una **presentación animada de PowerPoint**. Si usted lee el texto desde un ordenador, podrá ver la animación directamente con hacer doble-clic en el diagrama deseado.

3.1. Conversación: Planificación de colocación de robots y ayuda en caso de accidentes: ¿idos problemas en la economía completamente diferentes!?

En los últimos días, los miembros del equipo de Cléber-Consulting se han organizado en grupos: Oliver y Nadine visitaron la compañía de Electrónica PIM mientras que Selina y Sebastián fueron a la organización de primeros auxilios White Cross (WhC).

Selina: como vosotros sabéis, WhC es una organización internacional que se preocupa por el traslado de víctimas de accidentes en regiones de deportes de invierno. Así fue como tuvimos que realizar todas las conversaciones con los directivos en inglés. Afortunadamente, todo salió estupendamente, ¿no es así Sebastián?

Sebastián: ¡sí, todas las horas viendo MTV finalmente se justificaron! No... ya en serio: creo que logramos comunicarnos bastante bien con las personas de WhC. Hasta hace poco, WhC trasladaba a esquiadores, patinadores, etc. que se habían lesionado de vuelta al campamento, mediante trineos especiales, sobre los cuales montaban unos cargadores o en casos más difíciles, con vehículos móviles de rescate.

Selina: Ahora cuentan con dinero para comprar un helicóptero y la pregunta que WhC nos hizo fue la siguiente: ¿dónde debemos localizar el helicóptero, para poder asistir lo más pronto posible a las víctimas de los accidentes?

Oliver: Eso es muy fácil: ¡en la mitad!

Selina: Precisamente esa fue la respuesta que algunos de los compañeros de trabajo propusieron. Sin embargo, nadie sabía exactamente lo que “la mitad” significaría. Entre de los integrantes de la directiva, todo el tema resultó ser muy discutido, puesto que cada uno tenía su propia idea respecto a como proceder. Con argumentos como “el alcalde de la ciudad es un muy buen amigo mío y es por eso que esta ciudad sería un lugar ideal para la localización del helicóptero” no es posible resolver mucho. Ahora debemos escribirle a WhC un informe en el que les expliquemos detalladamente, la forma en que es posible evaluar la localización del helicóptero. Como ejemplo nos han proporcionado datos de las posibles locaciones y nosotros debemos recomendarles el lugar más apropiado. Es por ello que nuestra tarea es en un principio muy sencilla y por lo tanto mal remunerada.

Nadine: Pero si la directiva se ha peleado sobre esta pregunta, ¿cómo es que nosotros podremos hacerlo mejor y no entrar en conflictos?

Sebastián: WhC espera de nosotros que tengamos éxito en llevar esta discusión, la cual fue dirigida muy emocionalmente por ellos, a un plano más neutral. Nosotros les hemos explicado la forma en que nosotros afrontamos estos problemas a la hora de modelarlo matemáticamente y quedaron tan impresionados, que incluso nos dieron este encargo. Por cierto, el reporte lo podemos hacer en castellano, puesto que nuestra persona a contactar es española.

Selina: “Por favor no se le olvide que no soy matemático” nos enfatizo la persona a contactar de WhC en el momento de despedirse de nosotros. Es por eso que deberíamos proponer nuestros modelos para la elección de la localización del helicóptero de primero auxilios, de tal forma que alguien con conocimientos básicos de matemática escolar pueda comprender. ¿Cómo os fue a vosotros en PIM?

Oliver: la firma PIM está por iniciar un proceso de ensamblaje de placas. Para ello han construido una línea de montaje y han conseguido un robot con el cual las placas serán equipadas con las piezas electrónicas como los son los procesadores, la memoria, etc.

Nadine: Oliver empezó a promocionar de inmediato nuestros proyectos SchokoLeb y AutoAG y quiso darle a saborear a la directiva nuestros programas lineales para la planificación de la producción y nuestros métodos de distribución de trabajo. Ellos nos escucharon atentamente, pero no se mostraron muy interesados en ello. Al parecer utilizaron únicamente el comentario de Oliver para determinar si en el pasado hemos podido implementar nuestros modelos en alguna aplicación práctica significativa. Quedaron impresionados positivamente del éxito que hemos tenido y ello nos ayudó bastante en la conversación que sostuvimos. Al concluir nos indicaron lo que en realidad deseaban de nosotros: ellos desean que nos encarguemos de instalar los robots de una manera eficiente.

Sebastián: Y ¿qué significa eso exactamente?

Oliver: Eso aún lo tenemos que determinar en los próximos días. Al parecer se refieren a poder equipar la mayor cantidad de placas dentro de un marco de tiempo determinado, es decir, maximizar la productividad. Contamos en PIM con una persona de referencia, quien nos puede brindar información y a quien seguramente acudiremos frecuentemente.

Selina: pero ¿cuál es la situación en torno al compromiso de un contrato con ellos? Con nuestro encargo en WhC estaremos dos de nosotros bastante atareados por una semana.

Oliver: En PIM la situación es un poco más difícil: debemos describirle para empezar a la empresa lo que podemos hacer y luego entregarles una cotización. Eso quiere decir que necesitamos presentarles una descripción del problema mediante posibles modelos matemáticos, al igual que vosotros, y luego negociar con los encargados de PIM si recibiremos la asignación o no.

Selina: vuestro proyecto es entonces un poco más arriesgado que el nuestro, en lo que a la paga se refiere. Es posible que PIM no quede satisfecho con el modelo y al final no veamos nada del dinero.

Nadine: yo sugiero que de todas formas abarquemos con ambos proyectos. Oliver y yo nos encargamos del proyecto en PIM y vosotros os encargareis del proyecto de WhC. Como siempre, empecemos anotando lo que sabemos de los problemas. Ya podremos reunirnos posteriormente y discutir cuales son los pasos a seguir.

Discusión 3.1:

Problemas de localización aparecen muy frecuentemente en la economía.

- ¿Qué terminología acerca de localización podemos encontrar al leer periódicos o al ver las noticias en el televisor o al escuchar la radio?
- Si comparamos la mencionada tarea de "fortalecer la localidad española" con el poder encontrar el mejor lugar posible para alguna localidad: ¿cuál de las dos es la adecuada para aplicar un modelo matemático y por qué?
- ¿Qué tanto influirá el resultado indicado por un buen modelo matemático sobre la decisión en la práctica de elegir una localidad para solventar un problema de localización? ¿Será determinante, influirá decisivamente, influirá levemente o no tendrá ningún efecto?

3.2. Elección de la localización óptima de un helicóptero de primeros auxilios con ayuda de geometría elemental

Los datos del problema de WhC consisten en la indicación de las localizaciones en las que se puede requerir de una operación de rescate (de ahora en adelante llamadas **localizaciones existentes**) y que serán consideradas para la ubicación del helicóptero. Por lo general, es posible ubicar estos lugares como puntos en un mapa digital. Supondremos que estos puntos se pueden describir por coordenadas en un sistema de coordenadas. Es así como cada uno de estos puntos son descritos como $Ex_m(a_{m1} | a_{m2})$, donde a_{m1} es la coordenada sobre el eje x y a_{m2} es la coordenada sobre el eje y de la m -ésima localización existente. A través de M indicaremos la cantidad de localizaciones existentes.

Ejemplo 3.1:

Observemos el simple caso de únicamente dos posibles localizaciones de rescate $Ex_1(a_{11} | a_{12})$ y $Ex_2(a_{21} | a_{22})$, es decir $M = 2$. Dados los puntos $Ex_1(a_{11} | a_{12}) = Ex_1(1 | 2)$ y $Ex_2(a_{21} | a_{22}) = Ex_2(5 | 2)$ como localizaciones existentes, es fácil estar de acuerdo en lo que se entiende bajo "la mitad", en cuya ubicación se recomendaría la localización del helicóptero, siendo éste el punto medio del segmento $\overline{Ex_1Ex_2} = X(3 | 2)$ (ver algoritmo 3.1).

La forma en la que se construye el punto medio de un segmento es materia de cursos de educación primaria. El algoritmo a utilizar es repetido en el diagrama 3.4 (en el CD adjunto o en la versión electrónica de este texto en el ordenador, es posible reproducir el algoritmo en forma animada, utilizando PowerPoint.)

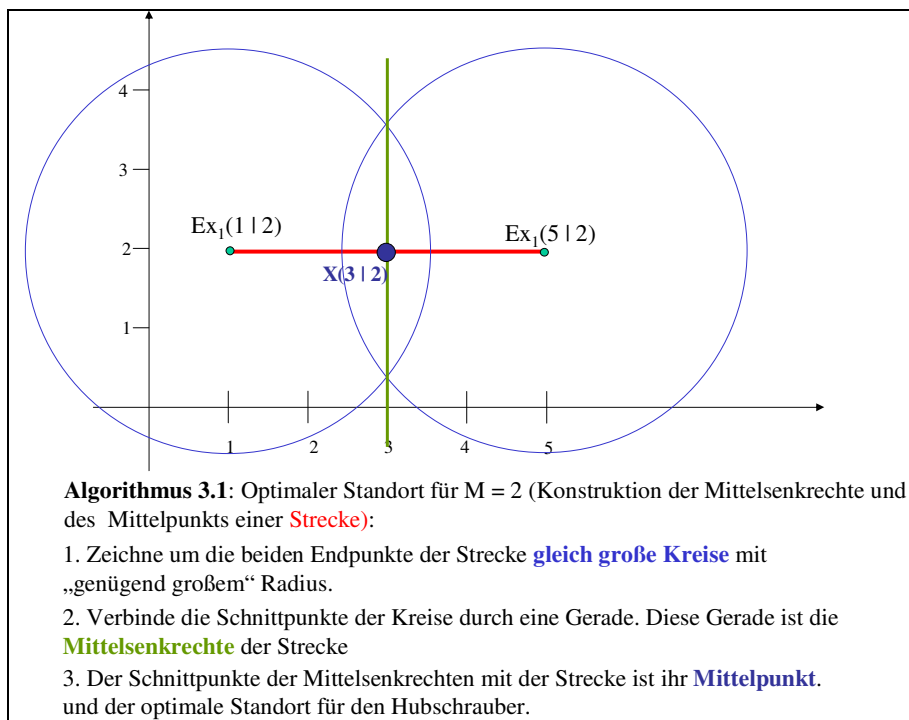


Diagrama 3.4 Algoritmo 3.1

¿Por qué nos da la impresión que el punto medio representa la mejor ubicación para el helicóptero? Esto es debido a que se encuentra a la misma distancia de ambas localizaciones en

las que posiblemente pueda requerirse de una operación de rescate y al mismo tiempo no existe un punto que se encuentre más cerca de ambas localizaciones a la vez. Esto quiere decir, que de ocurrir un accidente, el helicóptero llegará en el mismo tiempo tanto a Ex_1 como a Ex_2 . Visto desde un punto de vista matemático, el problema WhC se puede resolver por la sencilla determinación del punto medio de un segmento.

Ejemplo 3.2:

Para el caso de $M = 3$ analizaremos tres posibles localizaciones de rescate, por ejemplo $Ex_1(a_{11} | a_{12}) = Ex_1(2 | -2)$, $Ex_2(a_{21} | a_{22}) = Ex_2(2 | 6)$ y $Ex_3(a_{31} | a_{32}) = Ex_3(8 | 0)$. Si razonaremos de la misma manera que en el caso de $M = 2$, es decir con dos localizaciones de rescate, estaremos buscando un punto de localización del helicóptero que este ubicado a la misma distancia de las tres localizaciones. Este es el punto de intersección de las mediatrices (ver algoritmo 3.2).

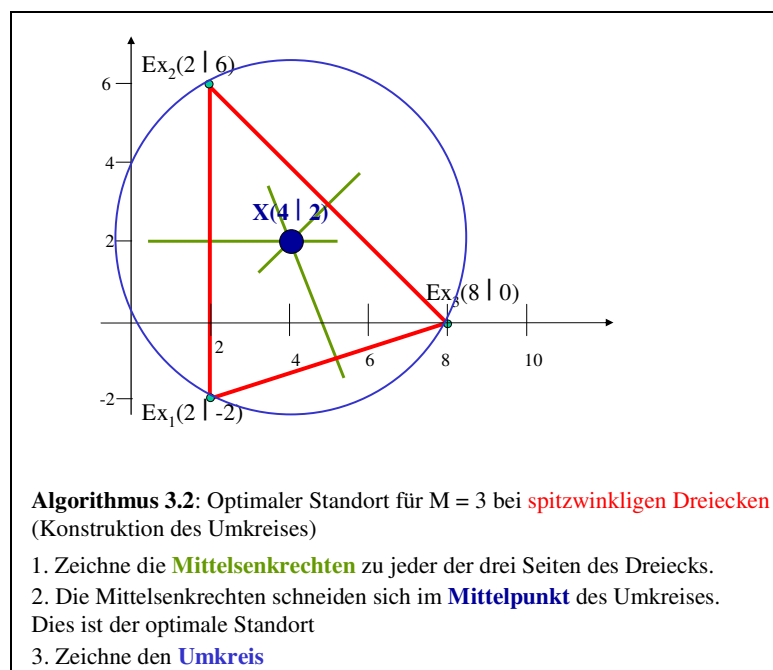


Diagrama 3.5 Algoritmo 3.2

Ejemplo 3.3:

Si en el caso $M = 3$ es decir al haber tres posibles localizaciones de rescate, el triángulo con los vértices $Ex_1(a_{11} | a_{12})$, $Ex_2(a_{21} | a_{22})$ y $Ex_3(a_{31} | a_{32})$ es un triángulo obtusángulo, entonces el punto de localización óptimo se encuentra en el punto medio del lado más largo del triángulo (ver algoritmo 3.3).

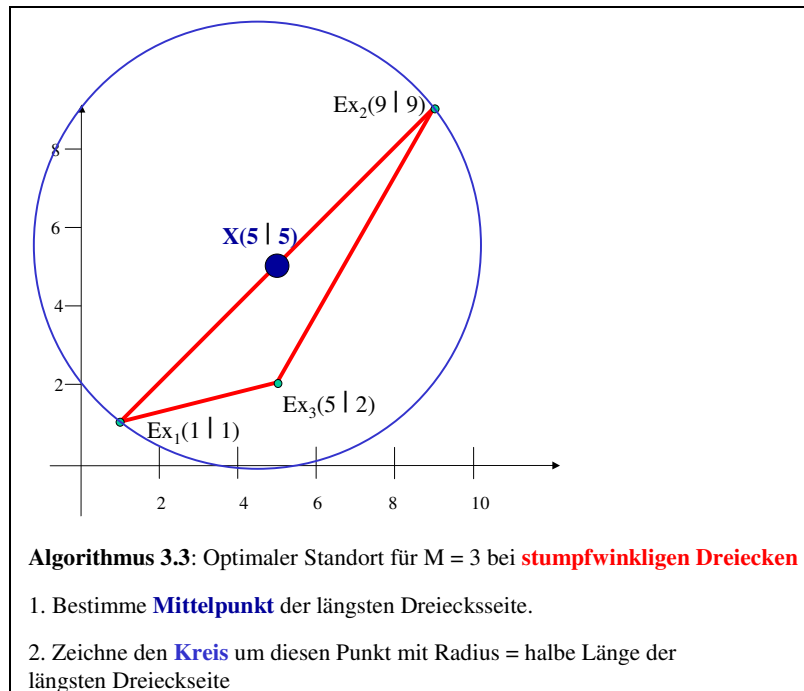


Diagrama 3.6 Algoritmo 3.3

(→Ej. 3.1)

La solución de los problemas de localización en los ejemplos 3.1 y 3.2 obedecían al mismo principio: el punto de localización óptimo $X(x_1 | x_2)$ se ubica a la misma distancia de todas las localizaciones de rescate y por lo tanto presenta hacia ellas una distancia mínima. Así, dado el caso de un accidente, el helicóptero podría asistir a cualquiera de los puntos con el mismo tiempo de reacción. Sin embargo, en el ejemplo 3.3 la situación es diferente: la distancia entre $Ex_1(1 | 1)$ y $Ex_2(9 | 9)$ es tan grande que es necesario escoger la mitad de este segmento como punto de localización. Como hemos visto para el caso de $M = 2$ (ejemplo 3.1), no es posible encontrar una mejor localización para estas dos localizaciones de rescate. Debido al ángulo obtusángulo del triángulo, la distancia de este punto a la tercera localización de rescate $Ex_3(5 | 2)$ es más pequeña que la mitad de la distancia entre $Ex_1(1 | 1)$ y $Ex_2(9 | 9)$, por lo que este punto sí resulta ser efectivamente, el mejor posible. (→Ej. 3.2).

Deseamos ahora generalizar esta definición de la localización óptima de un helicóptero de los ejemplos anteriores, para el caso de más de tres localizaciones de rescate (= localizaciones existentes):

Si asumimos que contamos con M localizaciones existentes $Ex_1(a_{11} | a_{12}), Ex_2(a_{21} | a_{22}), \dots, Ex_M(a_{M1} | a_{M2})$ y $X(x_1 | x_2)$ es un punto para la localización del helicóptero, entonces para $m = 1, \dots, M$

$$l_2(Ex_m, X) = \sqrt{(a_{m1} - x_1)^2 + (a_{m2} - x_2)^2}$$

es la distancia euclídea entre el m -ésimo punto de localización $Ex_m(a_{m1} | a_{m2})$ y X (ver diagrama 3.7).

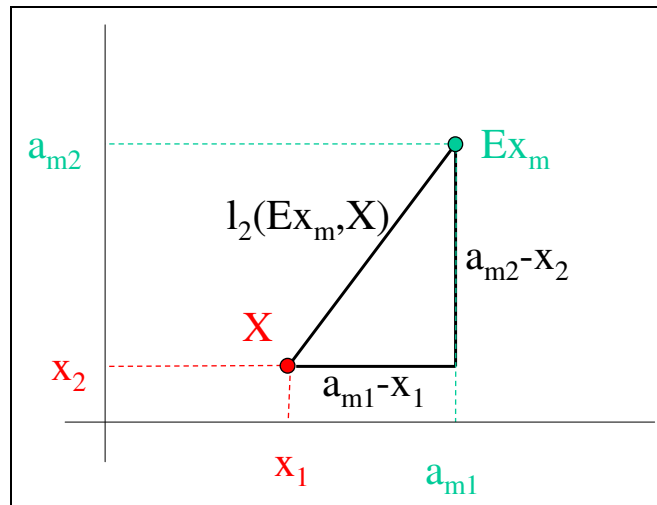


Diagrama 3.7 Cálculo de la distancia euclídea con ayuda del teorema de Pitágoras

Cuando decimos que el helicóptero entra en funciones, no sabemos previamente hacia que punto de rescate es al que debe dirigirse. No obstante, la vida de los lesionados puede depender directamente del tiempo que el helicóptero tarde en llegar. Por este motivo deseamos que la máxima distancia euclídea

$$g(X) := \max_{m=1}^M l_2(Ex_m, X)$$

hacia una posible localización de rescate sea lo más pequeña posible. $g(X)$ es la **función objetivo** del problema de localización, específicamente, y en el famoso spanglish, una **Center-función objetivo** (debido a que uno busca "la mitad" - en inglés: center) y el problema

$$\min_{X \text{ punto en el plano}} g(X) := \max_{m=1}^M l_2(Ex_m, X)$$

lo denominamos un **problema de localización en el plano con una Center-función objetivo** o abreviándolo un **Center-problema de localización**, en el cual buscamos el mejor punto de localización en el plano. A la solución óptima a este problema, le llamaremos **Center-punto de localización**.

Discusión 3.2:

- En lugar de resolver un problema de localización en el plano con una Center-función objetivo, también es posible buscar las localizaciones existentes y el nuevo punto de localización en el espacio (euclídeo) tridimensional. ¿Se trata esto únicamente de una generalización matemática o existen problemas concretos de la economía en los que esta generalización puede ser aplicada?
- ¿Cómo es posible modificar el problema si se cuenta con información respecto a la frecuencia en la que suceden accidentes en las diversas localizaciones de rescate?

Ejemplo 3.4:

Si $Ex_1(a_{11} | a_{12}) = Ex_1(1 | 4)$, $Ex_2(a_{21} | a_{22}) = Ex_2(3 | 6)$, $Ex_3(a_{31} | a_{32}) = Ex_3(8 | 2)$ y $Ex_4(a_{41} | a_{42}) = Ex_4(4 | 1)$ son las localizaciones existentes y $X(6 | 2)$ el punto de localización del helicóptero, entonces podemos determinar que

$$g(X) := \max_{m=1}^4 l_2(Ex_m, X) = \max\{\sqrt{29}, 5, 2, \sqrt{5}\} = \sqrt{29}$$

(ver diagrama 3.8). ¿Es posible encontrar un punto mejor de localización para el helicóptero? ¿Por ejemplo el punto $X(5 | 3)$? ¿Es éste mejor que $X(6 | 2)$? Si este fuera el caso, ¿es ésta ahora la localización óptima?

(→Ej.3.3)

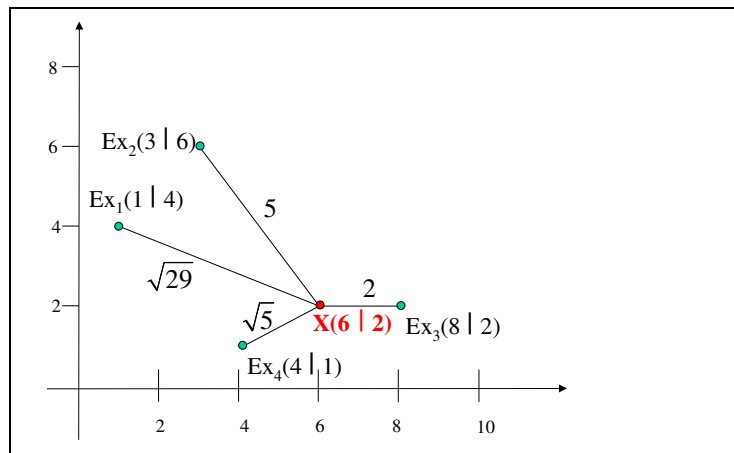


Diagrama 3.8 Center-función objetivo (los números sobre los segmentos indican los valores de las distancias euclídeas de los vértices Ex_m hacia X)

Como lo muestra el ejemplo 3.4, es posible que la búsqueda empírica de un punto de localización óptimo sea muy larga. Además, ¡no es posible asegurar que a través de esta búsqueda a prueba y error se llegue a la respuesta deseada! Esto es porque de tener un punto de localización óptimo, es necesario poder demostrar que en efecto se ha alcanzado la optimalidad. Es precisamente esto lo que haremos a continuación, para los casos de $M = 2$ y $M = 3$, en la cual haremos uso de la definición formal del Center-Punto de localización y la experiencia obtenida a través de los ejemplos 3.1 - 3.3.

Teorema 3.1:

El Center-Punto de localización óptimo es _____

1. para $M = 2$ el punto medio del segmento $\overline{Ex_1Ex_2}$

2. para $M = 3$

- el punto medio del círculo circunscrito, si el triángulo formado por los vértices $Ex_1(a_{11} | a_{12})$, $Ex_2(a_{21} | a_{22})$ y $Ex_3(a_{31} | a_{32})$ es acutángulo _____
- el punto medio del lado más largo del triángulo $\overline{Ex_iEx_j}$, si el triángulo formado por los vértices $Ex_1(a_{11} | a_{12})$, $Ex_2(a_{21} | a_{22})$ y $Ex_3(a_{31} | a_{32})$ es obtusángulo.

Demostración:

Para 1:

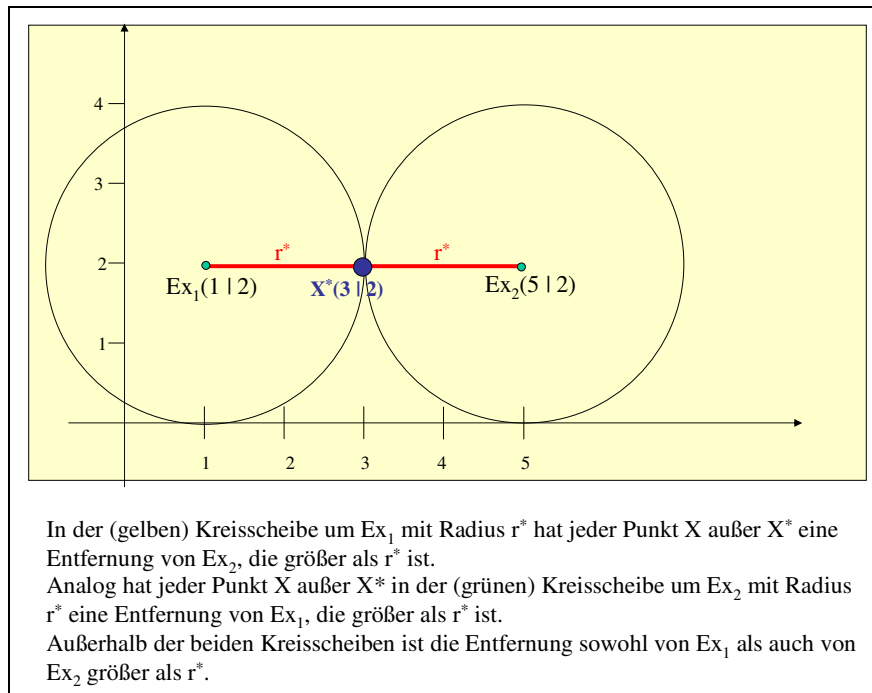


Diagrama 3.9 respecto a la demostración del Teorema 3.1 1

Para el punto medio $X^*(x_1^* | x_2^*)$ del segmento $\overline{Ex_1Ex_2}$ se tiene que:

$$g(X^*) = l_2(Ex_2, X^*) = l_2(Ex_1, X^*) = \frac{1}{2}l_2(Ex_1, Ex_2) =: r^*.$$

Sin embargo, para cualquier otro punto $X(x_1 | x_2)$ se tiene que $l_2(Ex_1, X) > r^*$ o $l_2(Ex_2, X) > r^*$ (ver Diagrama 3.9). Es así como podemos concluir que

$$g(X) = \max\{l_2(Ex_1, X), l_2(Ex_2, X)\} > r^* = g(X^*),$$

y por lo tanto es X^* el Center-Punto de localización óptimo.
Para 2:

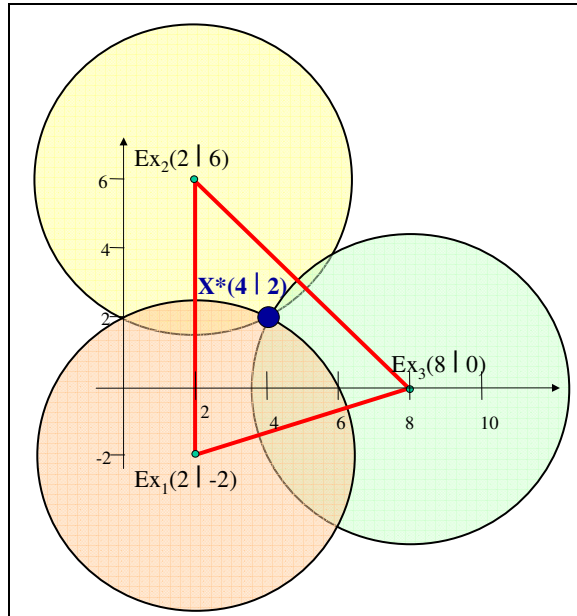


Diagrama 3.10 El único punto con distancia euclídea menor o igual que r^* hacia las tres localizaciones existentes es X^* . (Se utilizarán los mismos argumentos que en el diagrama 3.9)

Por definición del punto medio del círculo circunscrito como el punto de intersección de las mediatrices de los lados del triángulo se tiene que:

$$g(X^*) = l_2(Ex_1, X^*) = l_2(Ex_2, X^*) = l_2(Ex_3, X^*) =: r^*$$

Como lo muestra el diagrama 3.10, se tiene que para cada punto X , $l_2(Ex_1, X) > r^*$ o $l_2(Ex_2, X) > r^*$ o $l_2(Ex_3, X) > r^*$, si el triángulo formado por los vértices $Ex_1(a_{11} | a_{12})$, $Ex_2(a_{21} | a_{22})$ y $Ex_3(a_{31} | a_{32})$ es un triángulo acutángulo (debido a que en cada disco con radio r^* y con punto medio Ex_m la distancia de cada punto hacia uno de los otros dos puntos de localización es mayor que r^* , con excepción del punto X^* . Todos los puntos localizados afuera de los discos tienen una distancia mayor que r^* hacia cada uno de los Ex_m). De esta forma, podemos deducir como en la primera parte de la demostración que:

$$g(X) = \max\{l_2(Ex_1, X), l_2(Ex_2, X), l_2(Ex_3, X)\} > r^* = g(X^*),$$

y por lo tanto X^* es el Center-Punto de localización óptimo.

La argumentación del diagrama 3.10 se vuelve equivocada, si el triángulo es obtusángulo (¿por qué?). Sin embargo, en este caso, el punto medio X^* del lado más largo es claramente el mejor punto de localización para ambos extremos del lado, puesto que ello corresponde al caso de $M = 2$ localizaciones existentes, el cual hemos demostrado previamente. Si suponemos que, como en el diagrama ilustrativo del algoritmo 3.3, Ex_1 y Ex_2 son los vértices del lado más largo del triángulo. Entonces, para cada punto de localización X , diferente de X^* se tiene que:

$$\begin{aligned}
g(X) &= \max \{l_2(Ex_1, X), l_2(Ex_2, X), l_2(Ex_3, X)\} \\
&> \max \{l_2(Ex_1, X^*), l_2(Ex_2, X^*), l_2(Ex_3, X^*)\} \\
&= \max \{l_2(Ex_1, X^*), l_2(Ex_2, X^*)\} \\
&= g(X^*)
\end{aligned}$$

QED

El Center-Problema de localización para $M = 2$ y $M = 3$ se puede demostrar completamente con ayuda del teorema. Para $M > 3$ puntos de localización, es posible reducir el proceso de solución a uno de los tres casos descritos por el teorema: consideraremos en cada caso, duplas y tripletas de localizaciones existentes y resolvemos de acuerdo al teorema el Center-problema de localización, de manera independiente para estas duplas o tripletas de localizaciones. El punto óptimo obtenido, lo utilizaremos como punto medio de un círculo con radio $r^* := g(X^*)$. Si alguno de estos discos contiene a todas las demás localizaciones existentes, entonces es X^* es el punto medio del disco de radio más pequeño que cubre a todas las localizaciones existentes y por lo tanto es el punto óptimo de localización. En caso de no cumplirse esta característica, será necesario elegir una dupla o tripleta diferente.

Algoritmo 3.4: resolución del Center-Problema de localización

Entrada: Conjunto $Ex := \{Ex_1(a_{11} | a_{12}), Ex_2(a_{21} | a_{22}), \dots, Ex_M(a_{M1} | a_{M2})\}$ de todas las localizaciones existentes

Salida: Center-punto óptimo de localización $X^*(x_1^* | x_2^*)$ y Center-valor objetivo $r^* = g(X^*)$

Para todos las duplas y tríos (subconjuntos con dos o tres elementos respectivamente) en el conjunto Ex , realiza lo siguiente:

Paso 1: Determina el Center-punto óptimo de localización X' y el Center-Valor objetivo r' para el Center-problema de localización con dos o con tres localizaciones existentes respectivamente.

Paso 2: Determina el círculo de radio r' alrededor de X' . Si el disco contiene todos los elementos del conjunto Ex , retornar $X^* = X'$ y $r^* = r'$

Ejemplo 3.5:

Sea $M = 4$ y $Ex := \{Ex_1(a_{11} | a_{12}) = Ex_1(2 | -2), Ex_2(a_{21} | a_{22}) = Ex_2(2 | 6), Ex_3(a_{31} | a_{32}) = Ex_3(6 | 1), Ex_4(a_{41} | a_{42}) = Ex_4(8 | 0)\}$. En total existen $\binom{4}{2} = 6$ duplas y $\binom{4}{3} = 4$ tripletas.

Los puntos óptimos de localización de los Center-Problemas de localización con dos y con tres localizaciones existentes son mostrados en el diagrama 3.11. (¿Por qué son resueltos únicamente dos de los cuatro Center-problemas de localización con tres localizaciones existentes calculados previamente?)

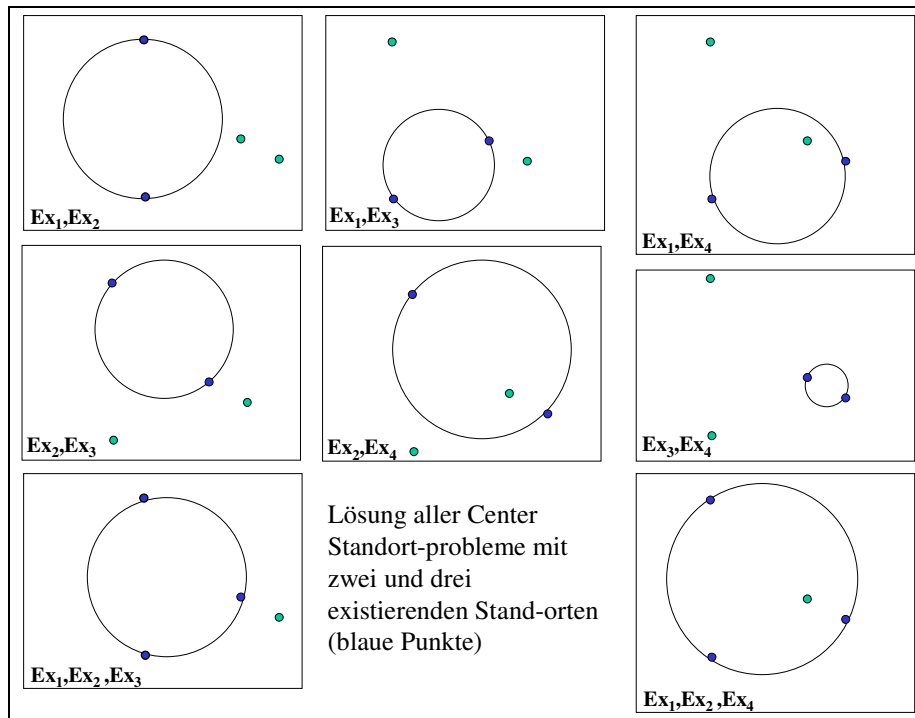


Diagrama 3.11 Solución de todos los Center-problemas de localización con dos o con tres puntos de localización existentes.

Como se puede observar, existe únicamente un círculo el cual contiene a **todas** las localizaciones existentes, siendo éste el que le pertenece al problema con Ex_1, Ex_2, Ex_4 . Es así como la solución es la misma que en el ejemplo 3.2.

(→Ej.3.4)

En lugar de obtener el Center-punto de localización del diagrama, es posible encontrarlo con ayuda de geometría analítica. Para ello, deseamos proceder de la misma forma como lo indica el algoritmo 3.4, sólo que en lugar de representarlo gráficamente, hacemos los cálculos respectivos. Es así como para cada dupla y cada tripleta en el conjunto Ex , haremos el siguiente procedimiento:

En primer lugar determinamos el Center-punto de localización óptimo X' para cada dupla o tripleta, con r' como valor de la función objetivo.

Para una dupla de puntos AB , con $A(a_1 | a_2)$ y $B(b_1 | b_2)$, el center-punto de localización óptimo es el punto medio del segmento de recta que une a ambos puntos. El punto medio M de ambos puntos lo encontramos calculando el promedio de las coordenadas sobre el eje x , es decir a_1 y b_1 y el de las coordenadas sobre el eje y , o sea a_2 y b_2 . El valor de estos promedios son las coordenadas del punto medio M . Es así como se obtiene que:

$$M \left(\frac{a_1 + b_1}{2} \mid \frac{a_2 + b_2}{2} \right)$$

El valor de la función objetivo $r'(X')$ para $X' = M$ lo obtenemos mediante la determinación de la distancia euclídea de M hacia $A(a_1 | a_2)$ o $B(b_1 | b_2)$, es decir:

$$\begin{aligned}
 r' &= \sqrt{\left(a_1 - \frac{a_1 + b_1}{2}\right)^2 + \left(a_2 - \frac{a_2 + b_2}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2a_1 - a_1 - b_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2a_2 - a_2 - b_2}{2}\right)^2} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{2a_1 - a_1 - b_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2a_2 - a_2 - b_2}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a_1 - b_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_2 - b_2}{2}\right)^2}
 \end{aligned}$$

En el caso de una tripleta de puntos, el center-punto de localización óptimo es el centro $U(u_1 | u_2)$ del círculo circunscrito, es decir el punto de intersección de las mediatrices de los segmentos que unen a cada punto entre sí. La mediatriz de un segmento AB pasa siempre por su punto medio M , cuyas coordenadas hemos podido determinar en el paso anterior. Además, la mediatriz del segmento AB está localizada en forma perpendicular a la recta que pasa por AB . La pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(a_1 | a_2)$ y $B(b_1 | b_2)$ tiene el valor de:

$$\frac{a_2 - b_2}{a_1 - b_1}$$

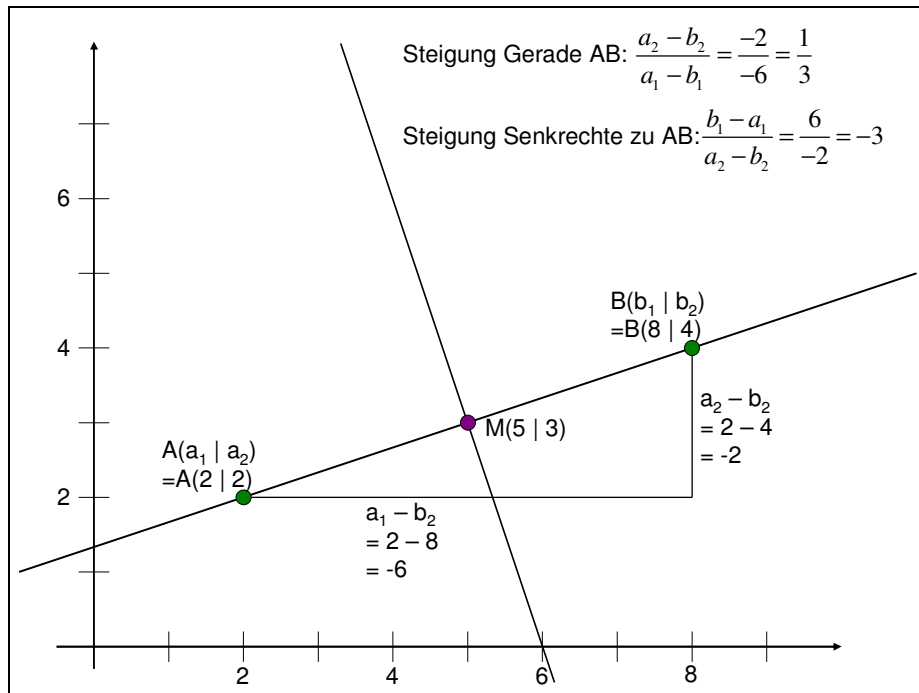


Diagrama 3.12 Referente a la pendiente de una recta y su normal.

Es sencillo concluir que la normal a una recta con pendiente

$$\frac{a_2 - b_2}{a_1 - b_1}$$

debe tener la pendiente

$$-1: \frac{a_2 - b_2}{a_1 - b_1} = -1 \cdot \frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2} = \frac{b_1 - a_1}{a_2 - b_2}$$

La mediatriz del segmento entre $A(a_1 | a_2)$ y $B(b_1 | b_2)$ pasará por lo tanto por

$$M\left(\frac{a_1 + b_1}{2} \mid \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$$

y tendrá la pendiente

$$\frac{b_1 - a_1}{a_2 - b_2}.$$

Para la ecuación $x_2 = mx_1 + n$ de la mediatriz se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{a_2 + b_2}{2} &= \frac{b_1 - a_1}{a_2 - b_2} \cdot \frac{a_1 + b_1}{2} + n = \frac{(b_1 - a_1) \cdot (b_1 + a_1)}{(a_2 - b_2) \cdot 2} + n = \frac{b_1^2 - a_1^2}{(a_2 - b_2) \cdot 2} + n \\ \Leftrightarrow n &= \frac{a_2 + b_2}{2} - \frac{a_1^2 - b_1^2}{2 \cdot (a_2 - b_2)} = \frac{(a_2 + b_2) \cdot (a_2 - b_2)}{2 \cdot (a_2 - b_2)} + \frac{a_1^2 - b_1^2}{2 \cdot (a_2 - b_2)} \\ &= \frac{a_2^2 - b_2^2}{2 \cdot (a_2 - b_2)} + \frac{a_1^2 - b_1^2}{2 \cdot (a_2 - b_2)} = \frac{a_2^2 - b_2^2 + a_1^2 - b_1^2}{2 \cdot (a_2 - b_2)} = \frac{a_1^2 + a_2^2 - (b_1^2 + b_2^2)}{2 \cdot (a_2 - b_2)} \end{aligned}$$

Y es así como la ecuación de la mediatriz del segmento entre $A(a_1 | a_2)$ y $B(b_1 | b_2)$ es:

$$x_2 = \frac{b_1 - a_1}{a_2 - b_2} x_1 + \frac{a_1^2 + a_2^2 - (b_1^2 + b_2^2)}{2 \cdot (a_2 - b_2)}$$

El punto de intersección $(x_{1s} | x_{2s})$ de dos mediatrices con ecuaciones $x_2 = m_1 x_1 + n_1$ y $x_2 = m_2 x_1 + n_2$ es posible encontrarlo a través de la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_{1s} &= m_1 x_{2s} + n_1 \\ x_{1s} &= m_2 x_{2s} + n_2 \end{aligned}$$

Sea el buscado punto de intersección, el punto $U(u_1 | u_2)$.

El valor de la función objetivo $r'(X')$ para $X' = U(u_1 | u_2)$ lo obtenemos mediante el cálculo de la distancia euclídea entre el punto U y uno de los puntos pertenecientes a nuestra tripleta de puntos, por ejemplo $A(a_1 | a_2)$. Así:

$$r' = \sqrt{(a_1 - u_1)^2 + (a_2 - u_2)^2}$$

Ahora es necesario revisar si el disco centrado en X' con radio r' contiene a todos los puntos del conjunto Ex . Para ello debemos revisar si la distancia euclídea entre X' y cualquiera de estos puntos es menor o igual que r' , es decir, ver si se cumple que:

$$g(X') := \max_{m=1}^M l_2(Ex_m, X') \leq r'$$

Si este es el caso, entonces podemos asegurar que el disco contiene a todos los puntos. Sin embargo, si existe algún punto Ex_n cuya distancia euclídea al punto X' es mayor que r' , o sea mayor que el radio del disco, es decir

$$g(X') := \max_{m=1}^M l_2(Ex_m, X') \geq l_2(Ex_n, X') > r'$$

entonces no es posible que el punto se encuentre dentro del disco propuesto alrededor de X' . Con ello podemos concluir que el disco no contiene a todos los puntos del conjunto Ex y que el punto sugerido por X' , deberá ser desechado en la búsqueda por la localización óptima. Finalmente, el punto de localización óptimo X^* se determina mediante:

$$r^* = r(X^*) = \min_{X \in \{\text{puntos no desechados}\}} r'(X)$$

Discusión 3.3:

- ¿Es posible indicar una cota superior para el número de problemas de dos y tres puntos que tienen que ser resueltos mediante la idea propuesta por el algoritmo 3.4?
- ¿Es posible extender la idea del algoritmo 3.4 para obtener el center-punto de localización en un espacio de tres dimensiones?

Ejercicios de repaso:

Ej.3.1 Encuentre el punto de localización óptimo para un helicóptero de primeros auxilios, dados las siguientes posibles localizaciones existentes

a) $Ex := \{Ex_1(a_{11} | a_{12}) = Ex_1(-2 | 2), Ex_2(a_{21} | a_{22}) = Ex_2(5 | 9), Ex_3(a_{31} | a_{32}) = Ex_3(5 | -1)\}$

b) $Ex := \{Ex_1(a_{11} | a_{12}) = Ex_1(3,5 | 6), Ex_2(a_{21} | a_{22}) = Ex_2(-1,5 | 10)\}$

c) $Ex := \{Ex_1(a_{11} | a_{12}) = Ex_1(5 | -5), Ex_2(a_{21} | a_{22}) = Ex_2(8 | 6), Ex_3(a_{31} | a_{32}) = Ex_3(7 | 9)\}$

También puede resolver este ejercicio de forma interactiva, abriendo los archivos Ü-3-1-a.html, Ü-3-1-b.html y Ü-3-1-c.html.

Ej.3.2 Compare para las siguientes localizaciones existentes que forman un triángulo obtusángulo, las distancias euclídeas de las localizaciones existentes hacia el punto medio del lado más largo del triángulo y hacia el centro del círculo circunscrito.

$$Ex := \{Ex_1(a_{11} | a_{12}) = Ex_1(-5 | 3), Ex_2(a_{21} | a_{22}) = Ex_2(1 | 3), Ex_3(a_{31} | a_{32}) = Ex_3(5 | -1)\}$$

También puede resolver este ejercicio de forma interactiva, abriendo el archivo Ü-3-2.html.

Ej.3.3 Resuelva el siguiente center-problema de localización analíticamente, dado que únicamente existen como posibles puntos de localización los puntos $X_1(4 | 5)$, $X_2(5 | 4)$ y $X_3(5 | 5)$ y las localizaciones existentes existentes vienen dados por

$$Ex := \{Ex_1(a_{11} | a_{12}) = Ex_1(0 | 0), Ex_2(a_{21} | a_{22}) = Ex_2(9 | -2), Ex_3(a_{31} | a_{32}) = Ex_3(7 | 13), Ex_4(a_{41} | a_{42}) = Ex_4(4 | 15)\}$$

Ej.3.4 Resuelva el center-problema de localización de acuerdo al algoritmo 3.4, dado que las posibles localizaciones existentes vienen dadas por:

$$Ex := \{Ex_1(a_{11} | a_{12}) = Ex_1(-12 | 4), Ex_2(a_{21} | a_{22}) = Ex_2(14 | 7), Ex_3(a_{31} | a_{32}) = Ex_3(18 | -6), Ex_4(a_{41} | a_{42}) = Ex_4(-9 | -5)\}$$

También puede resolver este ejercicio en forma interactiva, abriendo el archivo Ü-3-4.html.

3.3 Planificación de colocación de robots y median-problemas de localización

Empezaremos observando una versión simplificada del problema de ensamblaje de la firma PIM: representaremos la platina como un rectángulo y asumiremos que solamente M piezas de un único tipo de piezas electrónicas son las que deberán ser ensambladas. Las posiciones en las que las piezas deben ir son conocidas y han sido preparadas de tal forma que únicamente sea necesario colocar la pieza en dicha posición. Supondremos que las posiciones vienen dadas por puntos en un sistema de coordenadas, cuyo origen se localiza en la esquina inferior izquierda del sistema de coordenadas. Como fue el caso del problema del helicóptero de la sección 3.2, llamaremos a éstos **puntos de localización existentes** o localizaciones existentes y los denotaremos por $\{Ex_1(a_{11} | a_{12}), Ex_2(a_{21} | a_{22}), \dots, Ex_M(a_{M1} | a_{M2})\}$. Las piezas electrónicas se encuentran en un envase y el brazo del robot coge las piezas de este envase y las coloca en las posiciones donde deben ser instaladas. La fijación de las piezas en la platina requiere de un tiempo despreciable, por lo que el tiempo de ensamblaje solo dependerá de la distancia que el brazo del robot deberá recorrer entre el punto de localización del envase y el punto de instalación de la pieza. Sea $X = (x_1 | x_2)$ el punto de localización del envase (el cual aún debemos encontrar) y sea $d(Ex_m, X)$ una distancia a especificar o una distancia entre el m -ésimo punto de localización existente (= punto de instalación) y X . Entonces desearemos elegir a X de tal forma que la **median-función objetivo**

$$f(X) := \sum_{m=1}^M d(Ex_m, X)$$

sea lo más pequeña posible. Así, al problema:

$$\min_{X \text{ punto en el plano}} f(X) := \sum_{m=1}^M d(Ex_m, X)$$

le llamaremos el **median-problema de localización**. El diagrama 3.13 muestra un ejemplo de un problema de esta índole.

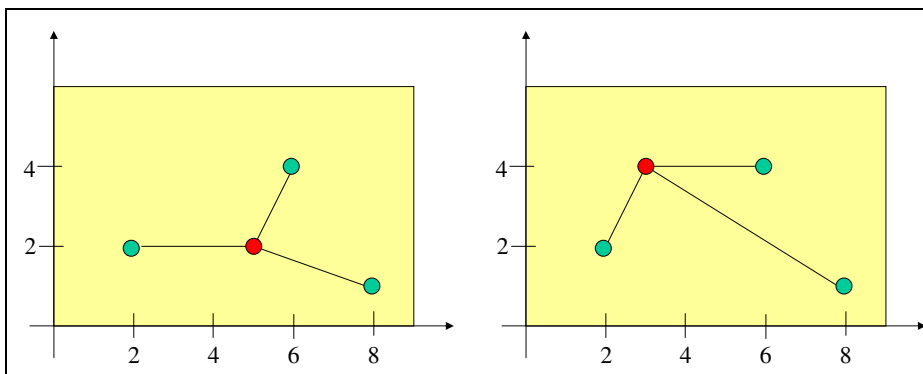


Diagrama 3.13 Problema de ensamblaje de platinas con tres puntos de instalación $Ex_1(2 | 2)$, $Ex_2(6 | 4)$ y $Ex_3(8 | 1)$, denotados por puntos verdes. Como dos alternativas para la elección del punto de localización del envase, vienen dados los puntos $X(5 | 2)$ y $X(3 | 4)$. ¿Cuál de los dos es la elección más apropiada?

En el ejemplo del diagrama 3.13, la median-función objetivo es el sumatorio de las longitudes de los segmentos que unen a los puntos de instalación con el punto de localización del envase. Es así como en este caso hemos hecho uso de la distancia euclídea entre puntos. De esta forma es fácil darse cuenta que $X(5 | 2)$ es un punto mejor de localización que $X(3 | 4)$ (→Ej.3.5). Pero, ¿es $X(5 | 2)$ el **median-punto de localización**, es decir el mejor punto de localización posible? Esta pregunta es más difícil de responder que cuando en la sección 3.2 buscábamos el center-punto de localización. Existen algunos casos especiales que se tratarán a continuación.

Ejercicios de repaso:

Ej.3.5 Calcule la median-función objetivo $f(X)$ para $X_1(5 | 2)$ y $X_2(3 | 4)$, si los puntos de localización existentes vienen dados por:

$$Ex := \{Ex_1(a_{11} | a_{12}) = Ex_1(2 | 2), Ex_2(a_{21} | a_{22}) = Ex_2(6 | 4), Ex_3(a_{31} | a_{32}) = Ex_3(8 | 1)\}.$$

Como medida de distancia, deberá utilizarse la distancia euclídea.

3.3.1 Solución geométrica para el caso de $M = 3$ y distancia euclídea

Para el median-problema de localización presentado en el diagrama 3.13 existe un algoritmo geométrico muy sencillo que es válido si se tienen $M = 3$ puntos de localización existentes y si el triángulo que se forma por los tres puntos de localización no tiene ningún ángulo interno mayor a 120° .

Algoritmo 3.5: Solución del median-problema de localización con distancia euclídea y $M = 3$ puntos de localización existentes

Entrada: Conjunto $Ex := \{Ex_1(a_{11} | a_{12}), Ex_2(a_{21} | a_{22}), Ex_3(a_{31} | a_{32})\}$ de $M = 3$ puntos de localización existentes, tal que el triángulo formado por estos puntos no tiene ningún ángulo interno mayor a 120° .

Salida: Median-punto de localización óptimo $X^*(x_1^* | x_2^*)$ y median-función objetivo óptima $f(X^*)$

1. Paso: Dibuja el triángulo A, B, C ($A = Ex_1, B = Ex_2, C = Ex_3$)

2. Paso: Construye sobre cada lado del triángulo un triángulo equilátero

3. Paso: Para cada uno de los nuevos vértices creados en el paso 2, une dicho punto con el vértice del triángulo A, B, C , que no pertenece al triángulo equilátero del paso 2. (Líneas de Simson).

4. Paso: Las líneas de Simson se intersectan en un punto, el **punto de Fermat** $X^*(x_1^* | x_2^*)$. Calcula los valores de X^* y $f(X^*)$.

(→Ej.3.6)

Las líneas de Simson llevan este nombre en honor a Robert Simson, un matemático inglés que vivió entre 1687 y 1768. El median-punto de localización óptimo es llamado punto de Fermat, porque Pierre de Fermat (1601-1665) presentó este problema de localización en su "Tratados sobre Máximos y mínimos" en 1643/44. Una demostración de la validez del algoritmo se puede encontrar en el CD adjunto.

El diagrama 3.14 muestra como el ejemplo del diagrama 3.13 se puede solucionar con ayuda del algoritmo 3.5.

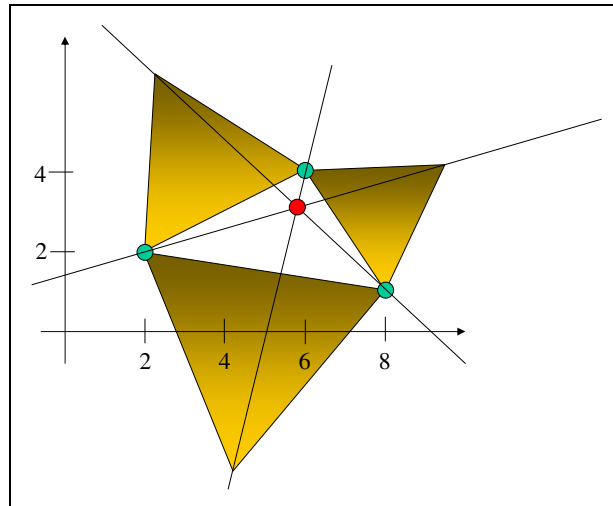


Diagrama 3.14 Solución del problema de ensamblaje de una platina con tres puntos de instalación $Ex_1(2 | 2)$, $Ex_2(6 | 4)$ y $Ex_3(8 | 1)$ mediante el algoritmo 3.5. El median-punto de localización óptimo se obtiene geoméricamente aproximadamente en el punto $X^*(5,8 | 3,2)$

Como median-punto de localización obtenemos mediante la gráfica aproximadamente el punto $X^*(5,8 | 3,2)$ con función objetivo

$$\begin{aligned} f((5,8|3,2)) &= \sum_{m=1}^M d(Ex_m, (5,8|3,2)) = \sum_{m=1}^M \sqrt{(a_{m1} - 5,8)^2 + (a_{m2} - 3,2)^2} \\ &= \sqrt{(2 - 5,8)^2 + (2 - 3,2)^2} + \sqrt{(6 - 5,8)^2 + (4 - 3,2)^2} + \sqrt{(8 - 5,8)^2 + (1 - 3,2)^2} \\ &= 7,92 \end{aligned}$$

No obstante, no podemos estar seguros que el punto que hemos obtenido en el diagrama 3.14 sea en efecto el resultado exacto. Para obtener el resultado correcto, calcularemos el median-punto de localización con ayuda de geometría analítica. Aquí procederemos de la misma forma que lo indica el algoritmo 3.6, pero analíticamente en lugar de graficamente.

Para empezar denotaremos los puntos $Ex_1(a_{11} | a_{12})$, $Ex_2(a_{21} | a_{22})$ y $Ex_3(a_{31} | a_{32})$ por $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ y $C(c_1, c_2)$ de tal forma que A , B und C sigan la secuencia en el sentido matemáticamente- positivo, es decir, en sentido contrario a las agujas del reloj.

Seguidamente continuamos con los triángulos equiláteros sobre los lados del triángulo ABC formado por los puntos de localización existentes. En lugar de dibujar los triángulos, calcularemos para cada triángulo equilátero el vértice que falta (como ejemplo, encontraremos el vértice correspondiente al lado del triángulo AB), el cual necesitamos para las líneas de Simson.

Para ello trabajaremos con vectores en el espacio \mathbb{R}^2 , es decir con el conjunto

$$\{(v_1 \ v_2) : v_1 \in \mathbb{R}, v_2 \in \mathbb{R}\} = \{(v_1, v_2) : v_1 \in \mathbb{R}, v_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Estos vectores nos los podemos imaginar como flechas en un plano que contiene un sistema de coordenadas. Es posible representar al vector $(v_1 \ v_2)$ o (v_1, v_2) como una flecha, cuya punta se localiza v_1 unidades en dirección del eje x_1 y v_2 unidades en dirección del eje x_2 alejado de su cola.

Ejemplo 3.6:

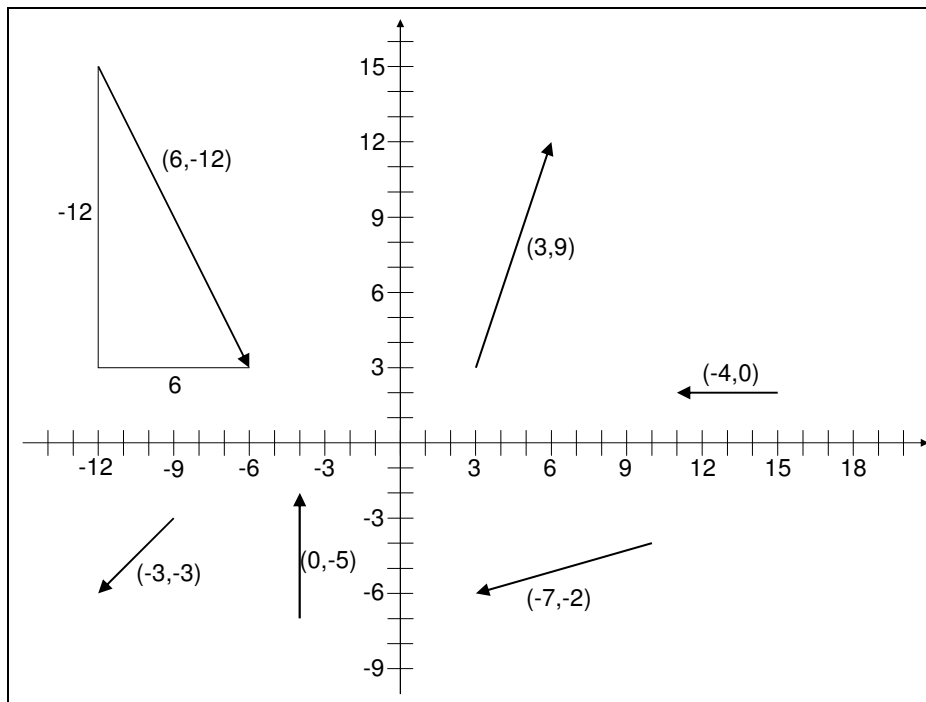


Diagrama 3.15 Representación de vectores como flechas en un plano que contiene un sistema de coordenadas

El vértice restante P_1 del triángulo equilátero sobre el lado AB lo calcularemos de la siguiente forma:

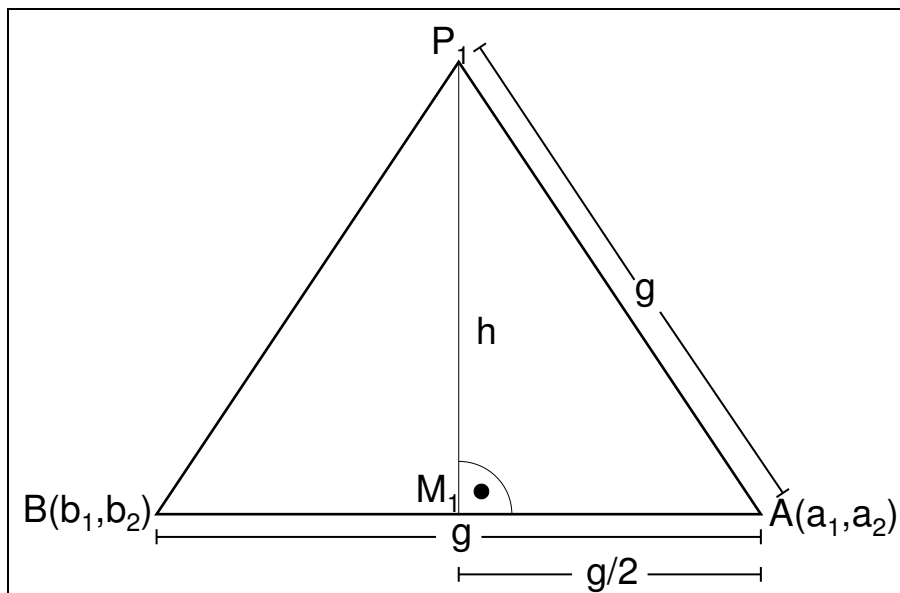


Diagrama 3.16 Referente a la deducción de la fórmula para h .

Empezaremos determinando el punto medio M_I del segmento AB . A partir del punto M_I nos moveremos en dirección perpendicular al segmento AB , h unidades hacia afuera. De acuerdo al teorema de Pitágoras, para h se tiene que:

$$h^2 + \left(\frac{g}{2}\right)^2 = g^2 \Leftrightarrow h^2 + \frac{g^2}{4} = \frac{4g^2}{4} \Leftrightarrow h^2 = \frac{4g^2 - g^2}{4} = 3\frac{g^2}{4} \Rightarrow h = \sqrt{3}\frac{g}{2},$$

con

$$g = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

Ahora respecto a la determinación de M_I : el vector $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ nos lleva del punto $A(a_1, a_2)$ hacia $B(b_1, b_2)$ pues se tiene que $(a_1, a_2) + (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (a_1 + (b_1 - a_1), a_2 + (b_2 - a_2)) = (a_1 + b_1 - a_1, a_2 + b_2 - a_2) = (b_1, b_2)$. Por lo que para llegar al punto medio del segmento AB lo logramos con

$$\begin{aligned} (a_1, a_2) + \frac{1}{2}(b_1 - a_1, b_2 - a_2) &= \left(\frac{2a_1}{2}, \frac{2a_2}{2}\right) + \left(\frac{b_1 - a_1}{2}, \frac{b_2 - a_2}{2}\right) \\ &= \left(\frac{2a_1 + b_1 - a_1}{2}, \frac{2a_2 + b_2 - a_2}{2}\right) \\ &= \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right) \end{aligned}$$

Este resultado no nos debería sorprender, puesto que el punto medio del segmento AB lo hubiésemos podido determinar encontrando el "punto medio" entre A y B , o en forma más explícita, como punto medio de las coordenadas x_1 y x_2 .

De

$$M_I = \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$$

nos trasladamos entonces

$$h = \sqrt{3}\frac{g}{2}$$

unidades en dirección perpendicular al segmento AB hacia "afuera", es decir alejándonos del triángulo formado por los puntos de instalación. Para un vector (v_1, v_2) es posible encontrar un vector perpendicular si para empezar intercambiamos las componentes v_1 y v_2 y luego modificamos el signo de ya sea v_1 o v_2 . Es así como por ejemplo el vector $(v_2, -v_1)$ se encuentra en posición perpendicular al vector (v_1, v_2) , lo cual se confirma mediante

$$\langle (v_1, v_2), (v_2, -v_1) \rangle = v_1 \cdot v_2 + v_2 \cdot (-v_1) = v_1 \cdot v_2 - v_1 \cdot v_2 = 0.$$

Es posible llegar a la conclusión que es necesario cambiar el signo de la segunda componente del vector si se desea ir en posición perpendicular al lado del triángulo AB hacia "afuera" y no hacia "adentro", es decir que del vector (v_1, v_2) se obtiene $(v_2, -v_1)$ (ver diagrama 3.17).

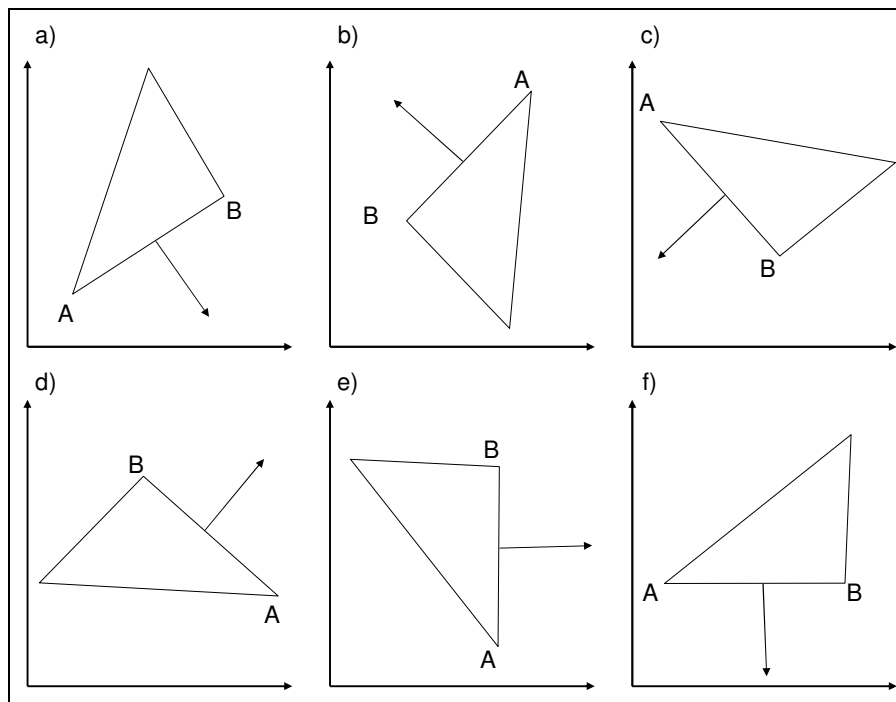


Diagrama 3.17 Ejemplificación del cambio de signo en la determinación de una normal que apunta hacia afuera del triángulo.

Un vector perpendicular al vector $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ es por lo tanto $(b_2 - a_2, -(b_1 - a_1)) = (b_2 - a_2, a_1 - b_1)$. Sin embargo, ¿cómo es posible darle a este vector, la longitud h ?

Observemos para empezar nuevamente al vector (v_1, v_2) . Este vector nos lo podemos imaginar como una flecha en un plano con un sistema de coordenadas. A esta flecha podemos colocar dos segmentos de longitud v_1 y v_2 , de tal forma que se forme un triángulo rectángulo y éstas sean paralelas a los ejes del sistema de coordenadas. De esta forma, la flecha formará la hipotenusa y los segmentos de longitud v_1 y v_2 formarán los catetos. De acuerdo al teorema de Pitágoras, el vector (v_1, v_2) tiene la longitud:

$$\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

Sin embargo, si necesitamos de un vector cuya dirección sea la misma que la de este vector (v_1, v_2) , pero cuya longitud sea h , entonces cogeremos simplemente el vector

$$\frac{h}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}(v_1, v_2),$$

como el vector (v_1, v_2) , cuya longitud fue modificada.

Es así como un vector que tiene la misma dirección que $(b_2 - a_2, a_1 - b_1)$ pero con longitud h es por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{h}{\sqrt{(b_2 - a_2)^2 + (a_1 - b_1)^2}}(b_2 - a_2, a_1 - b_1) &= \frac{h}{\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}}(b_2 - a_2, a_1 - b_1) \\ &= \frac{h}{\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}}(b_2 - a_2, a_1 - b_1) = \frac{h}{g}(b_2 - a_2, a_1 - b_1) \end{aligned}$$

Al sustituir h obtenemos:

$$\frac{h}{g}(b_2 - a_2, a_1 - b_1) = \frac{\sqrt{3}g}{2g}(b_2 - a_2, a_1 - b_1) = \frac{\sqrt{3}}{2}(b_2 - a_2, a_1 - b_1)$$

Para obtener el punto P_I , debemos movernos en dirección perpendicular hacia afuera como habíamos mencionado previamente. Esto quiere decir, que nos moveremos en la dirección del vector que recién hemos calculado y nos moveremos exactamente la longitud de este vector. Matemáticamente es posible hacer esto sumando el vector previamente calculado, a nuestro punto de partida M_I , es decir:

$$\begin{aligned} P_I &= \left(\frac{a_1 + b_2}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2}(b_2 - a_2, a_1 - b_1) = \frac{1}{2}(a_1 + b_2, a_2 + b_2) + \frac{\sqrt{3}}{2}(b_2 - a_2, a_1 - b_1) \\ &= \frac{1}{2} \left((a_1 + b_1, a_2 + b_2) + (\sqrt{3}b_2 - \sqrt{3}a_2, \sqrt{3}a_1 - \sqrt{3}b_1) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left((a_1 + b_1 + \sqrt{3}b_2 - \sqrt{3}a_2, a_2 + b_2 + \sqrt{3}a_1 - \sqrt{3}b_1) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left((a_1 - a_2\sqrt{3} + b_1 + b_2\sqrt{3}, a_1\sqrt{3} + a_2 - b_1\sqrt{3} + b_2) \right) \end{aligned}$$

Es así como podemos calcular directamente los valores para el punto P_I en esta fórmula o bien, procediendo paso a paso de la misma forma como fue posible deducir esta fórmula. A continuación calcularemos los vértices restantes de los triángulos equiláteros, de acuerdo a los datos del diagrama 3.14:

Ejemplo 3.7:

Para empezar, le cambiaremos los nombres a los puntos dados:

$A(a_1, a_2) = Ex_1(2 | 2)$, $B(b_1, b_2) = Ex_3(8 | 1)$, $C(c_1, c_2) = Ex_2(6 | 4)$. De esta forma, los vértices del triángulo ABC coinciden en su posición de acuerdo al sentido matemáticamente positivo.

Cálculo del tercer vértice para el triángulo equilátero sobre el segmento AB :

Primero calcularemos el punto medio del segmento AB :

$$M_1 = \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2} \right) = \left(\frac{2+8}{2}, \frac{2+1}{2} \right) = \left(\frac{10}{2}, \frac{3}{2} \right) = \left(5, \frac{3}{2} \right)$$

Luego encontramos el vector perpendicular al vector $(b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (8 - 2, 1 - 2) = (6, -1)$, el cual debe apuntar hacia "afuera", es decir alejándose del triángulo ABC . Para ello, intercambiamos las componentes y obtenemos $(-1, 6)$. Seguidamente, cambiamos el signo de la segunda componente, obteniendo así $(-1, -6)$.

Para darle a este vector la longitud correcta, encontraremos el valor correcto de g como sigue:

$$g = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} = \sqrt{(2-8)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{(6)^2 + 2^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$$

El vector que por lo tanto apunta en la dirección y con la longitud correcta es entonces:

$$\frac{h}{g}(b_2 - a_2, a_1 - b_1) = \frac{\sqrt{3}}{2}(b_2 - a_2, a_1 - b_1) = \frac{\sqrt{3}}{2}(-1, -6) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{6\sqrt{3}}{2} \right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -3\sqrt{3} \right)$$

Al punto M_I , le sumamos este vector, obteniendo:

$$\left(5, \frac{3}{2} \right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -3\sqrt{3} \right) = \left(5 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} - 3\sqrt{3} \right) = \left(\frac{10 - \sqrt{3}}{2}, \frac{3 - 6\sqrt{3}}{2} \right) \approx (4, 13, -3, 70)$$

Este resultado es el mismo que obtendríamos de haber sustituido directamente P_1 en la fórmula dada anteriormente:

$$P_1 = \frac{1}{2} \left((2 - 2\sqrt{3} + 8 + 1\sqrt{3}, 2\sqrt{3} + 2 - 8\sqrt{3} + 1) \right) = \frac{1}{2} \left((10 - \sqrt{3}, 3 - 6\sqrt{3}) \right)$$

Ahora calcularemos el punto P_2 , el cual es el vértice restante del triángulo equilátero sobre el segmento BC . Para ello, modificaremos la fórmula que deducimos para P_1 de tal forma que las componentes de B reemplacen a las de A y las componentes de C reemplacen a las de B . Así obtenemos:

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{1}{2} \left((b_1 - b_2\sqrt{3} + c_1 + c_2\sqrt{3}, b_1\sqrt{3} + b_2 - c_1\sqrt{3} + c_2) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left((8 - 1\sqrt{3} + 6 + 4\sqrt{3}, 8\sqrt{3} + 1 - 6\sqrt{3} + 4) \right) = \frac{1}{2} \left((14 + 3\sqrt{3}, 5 + 2\sqrt{3}) \right) \\ &\approx (9,60, 4,23) \end{aligned}$$

El punto P_3 , el cual es el vértice restante del triángulo equilátero sobre el segmento CA , lo calcularemos finalmente mediante una nueva modificación de la fórmula para P_2 , en la que las componentes de C reemplazan a las componentes de B y las componentes de A reemplazan a las de C . Así obtenemos:

$$\begin{aligned} P_3 &= \frac{1}{2} \left((c_1 - c_2\sqrt{3} + a_1 + a_2\sqrt{3}, c_1\sqrt{3} + c_2 - a_1\sqrt{3} + a_2) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left((6 - 4\sqrt{3} + 2 + 2\sqrt{3}, 6\sqrt{3} + 4 - 2\sqrt{3} + 2) \right) = \frac{1}{2} \left((8 - 2\sqrt{3}, 6 + 4\sqrt{3}) \right) \\ &\approx (2,27, 6,46) \end{aligned}$$

En cuanto a la determinación de las líneas de Simson, no debemos olvidar que este problema de localización se trata de un ejemplo para la matemática escolar.

Las líneas de Simson no son más que rectas o mejor dicho gráficas de una función lineal y por lo tanto es posible representarlas de la forma $x_2 = m_1x_1 + n_1$. Luego, para cada una de las líneas de Simson conocemos dos puntos: esto es debido a que una línea de Simson pasa por el vértice determinado del triángulo equilátero y por el punto de localización existente que no pertenece al triángulo equilátero. Estos dos puntos, sean por ejemplo estos $P_1(p_{11}, p_{12})$ y $C(c_1, c_2)$ deben por lo tanto satisfacer la ecuación $x_2 = m_1x_1 + n_1$, ya que de lo contrario no se encontrarían sobre la recta. De esta forma obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, siendo éstas m_1 y n_1 :

$$\begin{aligned} p_{12} &= p_{11}m_1 + n_1 \\ c_2 &= c_1m_1 + n_1 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones podremos encontrar los valores para m_1 y n_1 y de esta forma poder determinar la línea de Simson que pasa por P_1 y C .

Ejemplo 3.7 (continuación):

A continuación trabajaremos con los resultados previos, aproximando a dos decimales. Para empezar, calcularemos la ecuación $x_2 = m_1x_1 + n_1$ de la línea de Simson que pasa por el punto $P_1(p_{11}, p_{12})$ y $C(c_1, c_2)$. Es necesario que resolvamos el siguiente sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} p_{12} &= p_{11}m_1 + n_1 && \Leftrightarrow && (i) \quad -3,70 = 4,13m_1 + n_1 \\ c_2 &= c_1m_1 + n_1 && && (ii) \quad 4,00 = 6,00m_1 + n_1 \end{aligned}$$

Aquí hemos denotado la primera ecuación por (i) y la segunda por (ii). Si restamos (i) de (ii) obtendremos:

$$4,00 - (-3,70) = 7,70 = 1,87m_1 = 6,00m_1 + n_1 - (4,13m_1 + n_1)$$

es decir:

$$1,78m_1 = 7,70 \Leftrightarrow m_1 = \frac{7,70}{1,87} \approx 4,12$$

Este resultado lo sustituimos en (ii) y obtenemos:

$$4,00 = 6,00 \cdot \frac{7,70}{1,87} + n_1 \approx 24,71 + n_1 \Leftrightarrow n_1 \approx 4,00 - 24,71 = -20,71$$

La línea de Simson que pasa por el punto P_1 y C satisface por lo tanto la ecuación:

$$x_2 = 4,12x_1 - 20,71$$

Para encontrar la línea de Simson que pasa a través de $P_2(p_{21}, p_{22})$ y $A(a_1, a_2)$, deberemos resolver el siguiente sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} p_{22} = p_{21}m_2 + n_2 &\Leftrightarrow (i) 4,23 = 9,60m_2 + n_2 \\ a_2 = a_1m_2 + n_2 &\Leftrightarrow (ii) 2,00 = 2,00m_2 + n_2 \end{aligned}$$

Aquí nuevamente substraeremos, esta vez (ii) de (i) y obtenemos:

$$4,23 - 2,00 = 2,23 = 7,60m_2 = 9,60m_2 + n_2 - (2,00m_2 + n_2)$$

es decir:

$$7,60m_2 = 2,23 \Leftrightarrow m_2 = \frac{2,23}{7,60} \approx 0,29$$

Este resultado lo sustituimos en (ii) y obtenemos:

$$2,00 = 2,00 \cdot \frac{2,23}{7,60} + n_2 \approx 0,59 + n_2 \Leftrightarrow n_2 \approx 2,00 - 0,59 = 1,41$$

La línea de Simson que pasa por P_2 y A satisface por lo tanto la ecuación:

$$x_2 = 0,29x_1 + 1,41$$

Para encontrar la línea de Simson que pasa por $P_3(p_{31}, p_{32})$ y $B(b_1, b_2)$, deberemos resolver el siguiente sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} p_{32} = p_{31}m_3 + n_3 &\Leftrightarrow (i) 6,46 = 2,27m_3 + n_3 \\ b_2 = b_1m_3 + n_3 &\Leftrightarrow (ii) 1,00 = 8,00m_3 + n_3 \end{aligned}$$

En esta ocasión, substraeremos (ii) de (i) y obtenemos:

$$6,46 - 1,00 = 5,46 = -5,73m_3 = 2,27m_3 + n_3 - (8,00m_3 + n_3)$$

es decir:

$$-5,73m_3 = 5,46 \Leftrightarrow m_3 = \frac{5,46}{-5,73} \approx -0,95$$

Este resultado lo sustituimos en (ii) y obtenemos:

$$1,00 = 8,00 \cdot \left(-\frac{5,46}{5,73}\right) + n_3 \approx -7,62 + n_3 \Leftrightarrow n_3 \approx 1,00 - (-7,62) = 1,00 + 7,62 = 8,62$$

La línea de Simson que pasa por P_3 y B satisface por lo tanto la ecuación:

$$x_2 = -0,95x_1 + 8,62$$

Una vez que todas las líneas de Simson han sido determinadas, debemos calcular el punto de intersección entre ellas. Para ello, bastará con encontrar el punto de intersección de dos líneas de Simson, ya que las tres deben intersectarse en un único punto.

Ejemplo 3.7 (continuación):

Encontraremos dos de los tres posibles puntos de intersección para asegurarnos de no haber caído en algún error de cálculo a la hora de la determinación de las líneas de Simson. Para ello, no es necesario calcular todos los puntos de intersección puesto que si las rectas g y h se intersectan en un punto D y las rectas h e i lo hacen en un punto E , y si se tiene que $E = D$, entonces también deberán intersectarse g e i en D .

Empezaremos encontrando el punto de intersección de

$$(i) \quad x_2 = 4,12x_1 - 20,71$$

y

$$(ii) \quad x_2 = 0,29x_1 + 1,41$$

Substraeremos (ii) de (i) y obtenemos::

$$x_2 - x_2 = 0 = 3,83x_1 - 22,12 = 4,12x_1 - 20,71 - (0,29x_1 + 1,41)$$

es decir:

$$3,83x_1 = 22,12 \Leftrightarrow x_1 = \frac{22,12}{3,83} \approx 5,78$$

Este resultado lo sustituimos en (ii) y obtenemos:

$$x_2 = 0,29 \cdot \frac{22,12}{3,83} + 1,41 \approx 3,08$$

Es así como nuestro primer punto de intersección tiene las coordenadas:

$$(x_1 | x_2) = (5,78 | 3,08)$$

Ahora calcularemos el punto de intersección de

$$(i) \quad x_2 = 4,12x_1 - 20,71$$

y

$$(ii) \quad x_2 = -0,95x_1 + 8,62$$

Substraeremos (ii) de (i) y obtenemos:

$$x_2 - x_2 = 0 = 5,07x_1 - 29,33 = 4,12x_1 - 20,71 - (-0,95x_1 + 8,62)$$

es decir:

$$5,07x_1 = 29,33 \Leftrightarrow x_1 = \frac{29,33}{5,07} \approx 5,79$$

Este resultado lo sustituimos en (ii) y obtenemos:

$$x_2 = -0,95 \frac{29,33}{5,07} + 8,62 \approx 3,12$$

Es así como nuestro segundo punto de intersección tiene las coordenadas:

$$(x_1 | x_2) = (5,79 | 3,12)$$

Podemos observar que ambos puntos de intersección coinciden hasta la primera cifra decimal: las discrepancias en este caso son atribuidas al hecho que trabajamos con cifras aproximadas a dos decimales.

(→Ej.3.7)

Ejercicios de repaso

Ej.3.6 Resuelva el median-problema de localización para los siguientes puntos de localización existentes, tanto de acuerdo al algoritmo 3.5 y analíticamente.

$$Ex := \{Ex_1(a_{11} | a_{12}) = Ex_1(2 | 2), Ex_2(a_{21} | a_{22}) = Ex_2(6 | 4), Ex_3(a_{31} | a_{32}) = Ex_3(8 | 1)\}.$$

Usted puede resolver este ejercicio de forma interactiva, abriendo el archivo Ü-3-6.html.

Ej.3.7 Compruebe su solución gráfica obtenida en el Ej.3.6, calculando el median-punto de localización.

3.3.2 Resolución para distancias cuadráticas eclidianas a través de criterios de máximos y mínimos

Si en la median-función objetivo la distancia entre los puntos viene dada por la distancia euclídea, tendremos un problema en el que buscaremos minimizar la siguiente función:

$$f(X) = \sum_{m=1}^M d(Ex_m, X) = \sum_{m=1}^M \left(\sqrt{(a_{m1} - x_1)^2 + (a_{m2} - x_2)^2} \right)^2 = \sum_{m=1}^M \left((a_{m1} - x_1)^2 + (a_{m2} - x_2)^2 \right)$$

A primera vista obtener una respuesta puede resultar difícil, puesto que la función depende de dos variables: las dos coordenadas x_1 y x_2 del median-punto de localización buscado. No obstante, es posible encontrar un mínimo de esta función con los métodos clásicos de la matemática escolar, debido a que el sumatorio que compone a $f(X)$ puede ser reformulada de la siguiente forma:

$$f(X) = \underbrace{\sum_{m=1}^M (a_{m1} - x_1)^2}_{=: f_1(x_1)} + \underbrace{\sum_{m=1}^M (a_{m2} - x_2)^2}_{=: f_2(x_2)}$$

Debido a que todos los sumandos son mayores o iguales que cero, la función $f(X(x_1 | x_2))$ se minimiza sí y sólo sí tanto $f_1(x_1)$ como $f_2(x_2)$ son minimizadas. Sin embargo, tanto $f_1(x_1)$ como $f_2(x_2)$ son funciones diferenciables conocidas de una sola variable y con métodos estándar del cálculo diferencial obtenemos de

$$f_1'(x_1) = -2 \sum_{m=1}^M (a_{m1} - x_1) = 0 \quad \text{y} \quad f_2'(x_2) = -2 \sum_{m=1}^M (a_{m2} - x_2) = 0$$

los valores

$$x_1^* = \frac{\sum_{m=1}^M a_{m1}}{M} \quad \text{y} \quad x_2^* = \frac{\sum_{m=1}^M a_{m2}}{M}$$

Debido a que las segundas derivadas de ambas funciones tienen el término constante de $2M > 0$, las coordenadas del único punto mínimo, tanto de f_1 como de f_2 , se encuentran en x_1^* y x_2^* . Es

así como el punto $X^*(x_1^* | x_2^*)$ es el único punto mínimo de la función $f(X)$ y así el median-punto de localización (\rightarrow Ej.3.8). Con ello hemos podido demostrar el siguiente resultado.

Teorema 3.2:

El median-problema de localización

$$\min_{X \text{ punto en el plano}} f(X) := \sum_{m=1}^M \left((a_{m1} - x_1)^2 + (a_{m2} - x_2)^2 \right)$$

con M puntos de localización existentes y distancia euclídea tiene una única solución $X^*(x_1^* | x_2^*)$, donde x_1^* es la media aritmética de las coordenadas x y x_2^* es la media aritmética de las coordenadas y de los puntos de localización existentes.

Ejemplo 3.8:

Con los datos del ejemplo detallado en los diagramas 3.13 y 3.14, calculamos el median-punto de localización con distancia **cuadrática** euclídea a través de

$$x_1^* = \frac{\sum_{m=1}^M a_{m1}}{M} = \frac{2+6+8}{3} = \frac{16}{3} = 5,\bar{3} \quad \text{y} \quad x_2^* = \frac{\sum_{m=1}^M a_{m2}}{M} = \frac{2+4+1}{3} = \frac{7}{3} = 2,\bar{3}$$

Podemos observar que este es un median-punto de localización diferente al que encontramos para distancias euclídeas no cuadráticas en el diagrama 3.14.

(\rightarrow Ej.3.9-10)

Ejercicios de repaso

Ej.3.8 ¿Es posible encontrar un método de solución similar para distancias cuadráticas euclídeas, si en lugar de la función objetivo previa se tiene ahora la siguiente **median-función objetivo con pesos**

$$f(X) = \sum_{m=1}^M w_m d(Ex_m, X) = \sum_{m=1}^M w_m \left((a_{m1} - x_1)^2 + (a_{m2} - x_2)^2 \right)$$

donde los pesos son $w_m \geq 0$? ¿Tiene algún sentido el considerar una función objetivo de esta índole para el caso aplicado de la firma PIM o en alguna otra relación de la economía?

Ej.3.9 Calcule el median-punto de localización óptimo para distancias euclídeas y los puntos

$Ex := \{Ex_1(a_{11} | a_{12}) = Ex_1(0 | 0), Ex_2(a_{21} | a_{22}) = Ex_2(17 | 4), Ex_3(a_{31} | a_{32}) = Ex_3(-27 | 7), Ex_4(a_{41} | a_{42}) = Ex_4(19 | -78), Ex_5(a_{51} | a_{52}) = Ex_5(18 | -56), Ex_6(a_{61} | a_{62}) = Ex_6(-47 | 9), Ex_7(a_{71} | a_{72}) = Ex_7(26 | 64), Ex_8(a_{81} | a_{82}) = Ex_8(59 | 32), Ex_9(a_{91} | a_{92}) = Ex_9(-200 | 5)\}$.

Ej.3.10 Calcule el median-punto de localización óptimo para distancias euclídeas y una función objetivo con pesos, para los valores del Ej.3.9, donde los pesos vienen dados por:

$w_1 = 4, w_2 = 9, w_3 = 1, w_4 = 0, w_5 = 1, w_6 = 1, w_7 = 2, w_8 = 3, w_9 = 5$.

3.4 Conversación: Teoría de localización como una herramienta común

Nadine: es verdaderamente sorprendente que los dos grupos trabajamos en problemas completamente diferentes, sin embargo, los modelos que utilizamos son en realidad muy parecidos. Por ejemplo, ambos contamos con un conjunto $Ex := \{Ex_1(a_{11} | a_{12}), Ex_2(a_{21} | a_{22}), \dots, Ex_M(a_{M1} | a_{M2})\}$ de localizaciones existentes: en nuestro caso se tratan de los puntos de

instalación para las piezas electrónicas y en el caso de vosotros son las localizaciones de rescate para el helicóptero de primeros auxilios. Si observamos únicamente el sistema de coordenadas, apenas notamos diferencia alguna entre los problemas: en el problema de *PIM*, las distancias sobre la platina son muy pequeñas mientras que en el problema de *WhC*, las distancias son muy grandes. Las funciones objetivo son también bastante parecidas, puesto que nuestra median-función objetivo y vuestra center-función objetivo

$$f(X) = \sum_{m=1}^M d(Ex_m, X) \quad \text{y} \quad g(X) := \max_{m=1}^M d(Ex_m, X)$$

se diferencian únicamente en que para la primera estamos interesados en el sumatorio de las distancias mientras que en la segunda nos interesa el máximo de las distancias.

Sebastián: Resulta un poco peculiar el hecho que center-problemas con distancias euclídeas son muy sencillos de resolver, mientras que en el caso de median-problemas para una cantidad arbitraria de localizaciones existentes, contamos con una metodología funcional únicamente para el caso de distancias euclídeas cuadráticas.

Oliver: Si, es cierto. Ahora bien, ya sabemos algo sobre la solución de problemas de localización, para los informes que realicemos para la firma *PIM* y la organización *WhC*, es necesario que investiguemos un poco más al respecto. Por ejemplo, he hablado con la persona encargada de producción en *PIM* y me ha informado sobre la forma en la que el brazo del robot ejecuta sus movimientos. Visto como un todo, el movimiento es bastante complejo y uno debería considerar a la hora de analizar los movimientos tanto la aceleración como la desaceleración del brazo del robot. Ella opinaba que la medida de distancia que habíamos considerado en nuestro modelo, la distancia euclídea, no era la más adecuada.

Selina: ¡Eso son malas noticias! Entonces queda claro que todo lo que habéis hecho en el proyecto para *PIM* habrá que descartarlo y empezar prácticamente desde el principio.

Oliver: No, tan crítica no es la situación. La encargada de producción opinaba que debido al pequeño tamaño de la platina semiconductora y de la tecnología de los robots utilizados, sería factible considerar a la distancia **rectangular** (o distancia l_1)

$$d(Ex_m, X) = l_1(Ex_m, X) := |a_{m1} - x_1| + |a_{m2} - x_2|$$

como la medida de distancia eficiente entre los puntos de instalación y el punto de localización del envase.

Nadine: Si, hacemos un gráfico de lo que dices, hace sentido el comentario (ver diagrama 3.18).

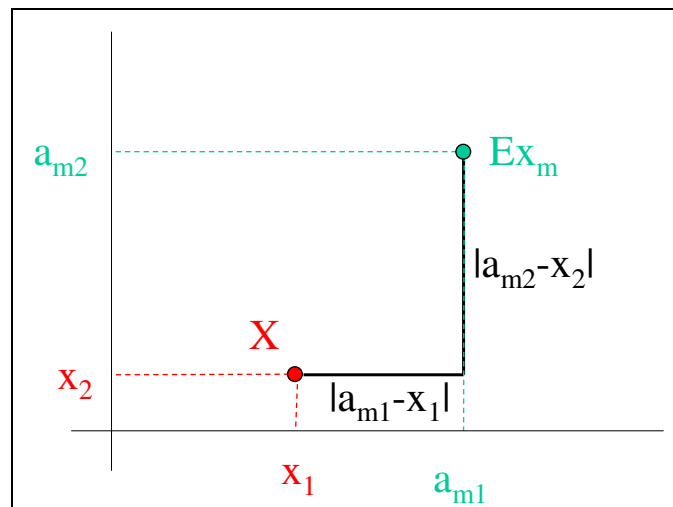


Diagrama 3.18 Determinación de la distancia rectangular.

Los robots de la firma cuentan con únicamente un motor, el cual traslada el brazo en dirección de ambos ejes de coordenadas. El sumatorio de ambas distancias en dirección de los ejes de coordenadas decidirán el tiempo que le llevará al brazo trasladarse del punto de localización X del envase al punto de instalación Ex_m de la pieza electrónica. A esta forma de medir distancias se le conoce también como distancias de Manhattan, debido a que en Manhattan, por la distribución de las calles, únicamente es posible movilizarse a lo largo de los ejes de coordenadas (→Ej.3.11).

Oliver: Vale. Ahora debemos investigar si nos es posible resolver median-problemas de localización con una función objetivo que, en lugar de basar la medida de distancia en la distancia euclídea, lo haga conforme a la distancia rectangular. En el caso de vuestro modelo para el problema *WhC*, ¿cómo se plantea la situación? ¿Es suficiente lo que habéis anotado hasta el momento (ver sección 3.2)?

Sebastián: No, ha surgido un problema que no habíamos considerado con anterioridad. En el momento en el que hemos determinado el center-punto de localización óptimo para el helicóptero, es posible que este punto se encuentre precisamente en un área protegida o algo por el estilo. Es por eso que adicionalmente tendremos que definir **restricciones** a la hora de querer determinar nuestro punto de localización.

Selina: Todo parece indicar que únicamente debemos expandir un poco el modelo que hemos propuesto, para que así podamos resolver efectivamente el problema de *WhC*. Veo que todos tenemos todavía ciertas cosas por hacer. Sebastián y yo nos dedicaremos en los siguientes días a trabajar en las restricciones, mientras que Oliver y Nadine, vosotros os encargareis de buscar la solución para el median-problema de localización con distancias rectangulares.

Oliver: De acuerdo. Además anotaré toda la información que he conseguido sobre la relación que existe entre teoría de localización y los problemas en la economía. Ya he encontrado bastante información en libros y en internet. Existe una cantidad de problemas en la economía que tienen que ver con teoría de localización y hay por lo tanto bastante campo en esta área. Creo que el trabajo que estamos haciendo ahora es una buena inversión para el futuro...

Selina: ... y para obtener bastante dinero.

Nadine: ¡Calmaos ya! Hasta el momento no saben aún como resolver los problemas de *PIM* y de *WhC* correctamente. Estoy de acuerdo con la distribución de tareas y me parece que la idea de Oliver es también muy buena y nos puede llevar adelante. Así que, andando y a trabajar.

Ejercicios de repaso

Ej.3.11 Calcule la distancia l_i de los siguientes pares de puntos:

- a) $(0 | 0)$ y $(17 | 4)$ b) $(-27 | 7)$ y $(19 | -78)$ c) $(18 | -56)$ y $(-47 | 9)$
d) $(26 | 64)$ y $(59 | 32)$ e) $(-200 | 5)$ y $(17 | 4)$ f) $(8 | 18)$ y $(3 | 11)$.

3.5 Futuras perspectivas: Teoría de localización en la economía

Debido a su gran importancia para alcanzar objetivos comerciales o sociales, la toma de decisiones sobre un "buen" punto de localización tiene en muchas ramas de la economía una vital importancia. Frecuentemente escuchamos en las noticias comentarios acerca de "la localidad española" o del "igualamiento de las desventajas de los puntos de localización", etc. Cuando las empresas, por ejemplo, una fábrica abre una nueva planta en el este europeo, debido a que los costos de trabajo son allí más bajos, el modelo que ha llevado a esta toma de decisiones resulta ser mucho más complejo que el que hemos tratado en los capítulos anteriores. No obstante, los razonamientos que hemos realizado hasta el momento y que haremos en los capítulos siguientes, son parte de un modelo global. Es así como las preguntas que hemos tratado aquí siguen siendo relevantes, aún cuando la teoría de localización es una de las ramas más antiguas de la matemática industrial.

En la **teoría de localización para la economía nacional** se busca explicar u optimizar el establecimiento de empresas o el funcionamiento de los sectores de la economía. Un primer ejemplo de la teoría de la localización para la economía nacional son las investigaciones de Johann Heinrich von Thünen (1783-1850). Modeló el ordenamiento de la agricultura y su producción en un estado aislado, en el cual existe únicamente un lugar de carga y considera para su investigación el valor de la tierra, la distancia hacia el lugar de carga y los costos de producción. Lo que quería encontrar, era el motivo por el cual la tierra utilizable para la agricultura alrededor de una ciudad le era asignada una utilización en particular, así como determinar por que actividades como el trabajo de campo, la industria pastoral, la economía de la madera, la producción de la leche, etc. siempre se encontraban localizadas en una secuencia determinada, en círculos, alrededor de la ciudad (los llamados círculos de Thüne). Llegó a la conclusión de que el tipo de utilización de la tierra para la agricultura no venía únicamente determinada por las características naturales e inamovibles de la tierra, sino que principalmente de un hecho económico: la distancia del lugar de producción al lugar de consumo y por lo tanto de los costos de transporte.

En la **teoría de localización externa** se formulan preguntas sobre la elección de un lugar para empresas, las cuales cuentan con sus respectivos mecanismos en lugares físicamente distintos, por ejemplo fábricas, centros de distribución locales o centrales, etc. El problema mostrado en este capítulo de *WhC* es un ejemplo de éstos. Así como en la teoría de localización para la economía nacional, existe en esta rama también un investigador quien desde el siglo 19 realizó aportes de gran importancia. Carl **Wilhelm** Friedrich **Launhardt**, 1832-1918 modeló el problema con tres puntos de localización existentes (dos distribuidoras de materia prima y un punto de descarga) y un nuevo punto de localización aún desconocido (una fábrica) que estudiamos y resolvimos en la sección 3.3.1. Este problema es conocido también como el **problema de Weber** en honor al sociólogo y economista Alfred Weber (1868-1958), quien con su publicación

"Sobre la teoría de localización de las industrias" en el año 1909, se convirtió en el padre de la teoría de localización.

Algunos autores hacen mención, además de la teoría de localización externa, la teoría de localización interna o layout-planning. En ella se investiga la distribución del espacio de las unidades de una organización dentro de las fronteras propias de la empresa.

Los límites entre las tres partes mencionadas en este capítulo son bastante flexibles. En especial se puede observar que los mismos modelos matemáticos pueden ser aplicados en gran parte a diferentes problemas de la teoría de localización (que es obviamente una de las grandes ventajas de las matemáticas).

Hoy en día es posible encontrar en muchas de las empresas un espacio reservado para la teoría de localización como una parte de su departamento de logística o dentro de la directiva encargada de la cadena de suministro (Supply Chain Management). En estos departamentos o grupos, la problemática no se resuelve aisladamente, sino que se busca encontrar la forma de determinar un "buen" punto de localización junto a otras decisiones de interés para la compañía. Por ejemplo para el programa APO (Advanced Planner and Optimizer) de la firma SAP se desarrolló un módulo, el cual fue a su vez desarrollado a partir de las bibliotecas del programa LoLa (ver apéndice), las cuales pueden ser obtenidas de forma gratuita.

3.6 Center-problemas de localización restrictivos

Como en la sección 3.2 , se hará uso en la center-función objetivo $g(X) := \max_{m=1}^M l_2(Ex_m, X)$ la

distancia euclídea $l_2(Ex_m, X) = \sqrt{(a_{m1} - x_1)^2 + (a_{m2} - x_2)^2}$. Deseamos ahora elegir X de tal forma que $g(X)$ sea lo más pequeña posible. Esta vez, sin embargo, no estaremos buscando el punto en cualquier lugar del plano, sino que ciertas regiones del plano serán excluidas, puesto que representarían puntos de localización donde el helicóptero no se puede colocar. En notación formal, el **center-problema de localización restrictivo** viene dado por:

$$\min_{X \notin \text{int}(R)} g(X) := \max_{m=1}^M l_2(Ex_m, X)$$

donde R es una región en el plano e $\text{int}(R)$ es el interior de esta región. Uno debe imaginarse aquí por ejemplo a R como la región que ocupa un lago. Por lo general, en el interior del lago no se desea colocar un helipuerto, sin embargo en la costa si se podría hacerlo. Es por eso que el borde de R si lo consideraremos como posible punto de localización para el helicóptero.

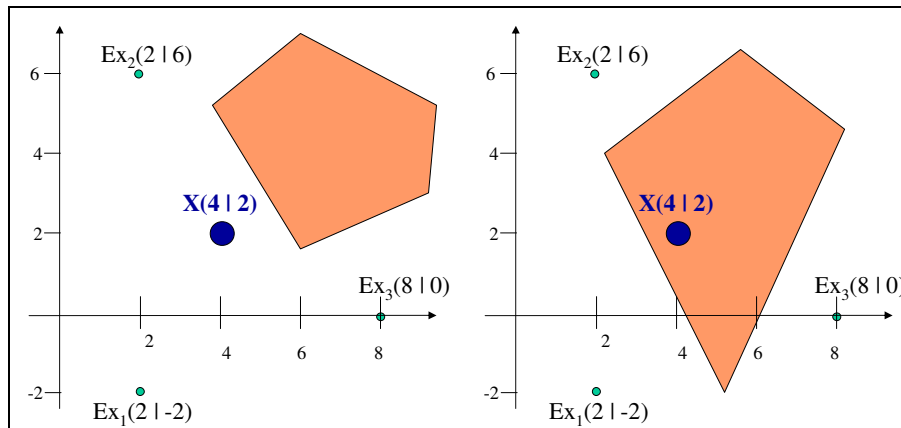


Diagrama 3.19 *Dos restricciones distintas en un center-problema de localización restrictivo. En los poliedros naranjas, no está permitido que se instale el punto de localización del helicóptero. En el caso del primer ejemplo, la restricción no tiene ningún efecto, puesto que $X(4 | 2)$ no se encuentra en el área prohibida. Sin embargo, en el segundo ejemplo, se observa que el center-punto de localización sin restricciones $X(4 | 2)$ no es factible.*

Como lo muestran los ejemplos en el diagrama 3.19, las restricciones en los problemas de localización no necesariamente implican hacer del problema, uno más difícil de resolver. Por eso en primer lugar, se resuelve el center-problema de localización sin restricciones. Si el center-punto de localización es factible, es decir, si éste no se encuentra en una región prohibida, entonces también se trata de la localización óptima para el center-problema de localización restrictivo.

Sin embargo, si el punto no es factible, es decir si el punto determinado se encuentra en el interior de la región prohibida, entonces debemos encontrar otro punto de localización para el helicóptero. El diagrama 3.20 muestra la forma en que debemos proceder, si la región no permitida es un poliedro convexo². De la sección 3.2 sabemos que el center-punto de localización (no restrictivo) es el punto medio del círculo circunscrito para dos o tres puntos, los cuales representan a los puntos de localización existentes. A su vez, el radio del círculo circunscrito es el valor de la función objetivo. Por otro lado, este center-punto de localización (no restrictivo) es un punto único, el cual se forma a partir de la intersección de los círculos de mismo radio que se trazan alrededor de los dos a tres puntos de localización existentes. (ver diagrama 3.20 a). Si el punto medio no es factible, es decir que se encuentre localizado en el área prohibida, el valor de la función objetivo aumenta. Esto lo modelamos mediante un aumento en los radios de los círculos centrados en los puntos de localización existentes ("inflar los círculos"). Como lo muestra el diagrama 3.20, existen dos situaciones en las que la intersección de los discos roza por la parte de adentro, el borde de la región prohibida:

1. Caso:

El roce ocurre en un punto de intersección de los discos, el cual pertenece a dos de los círculos trazados (ver diagrama 3.20 (b)). Estos puntos los obtenemos mediante la determinación de la intersección entre la mediatriz (al segmento que une dos puntos de localización existentes que son los centros de los círculos recién descritos) y el borde del poliedro.

2. Caso:

² un **poliedro convexo** se obtiene a partir de la intersección de hiperplanos, los cuales a su vez fueron originados por rectas (comparar con sección 1.1)

El roce ocurre cuando uno de los círculos tiene a una de las orillas del poliedro como tangente (ver diagrama 3.20 (c)). Al punto de roce le encontramos el eje radial desde el punto medio del círculo, sobre la orilla del poliedro.

Uno de estos dos casos deben ocurrir para el problema del center-punto de localización restrictivo. Este lo obtenemos al encontrar todos los puntos de intersección de los bordes del poliedro con las mediatrices (de los segmentos cuyos extremos son parejas de puntos de localización existentes) y todos los puntos al pie del eje radial de los puntos de localización existentes en los bordes del poliedro. Al final, escogeremos a aquel punto con el mejor valor de la center-función objetivo.

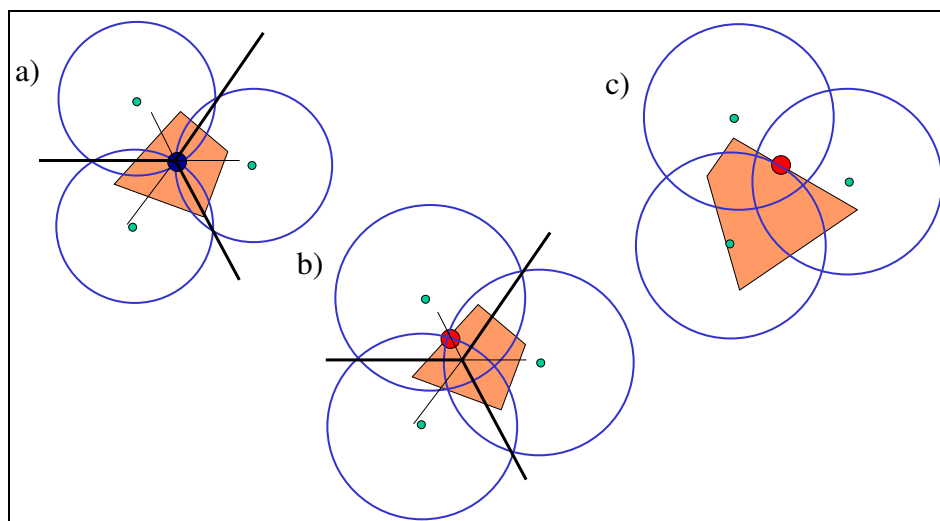


Diagrama 3.20 Solución de un center-problema de localización restrictivo. a) Solución del problema de localización sin restricciones de acuerdo al algoritmo 3.2. b) Inflando los círculos centrados en los puntos de localización existentes hasta que el conjunto de la intersección de los círculos roce la región prohibida por dentro. c) el mismo inflado pero con un diferente conjunto restrictivo.

Resumiendo, obtenemos así el siguiente algoritmo para la determinación de un center-punto de localización restrictivo:

Algoritmo 3.6: Resolución del center-problema de localización restrictivo con distancia euclídea

Entrada: Conjunto $Ex := \{Ex_1(a_{11} | a_{12}), Ex_2(a_{21} | a_{22}), \dots, Ex_M(a_{M1} | a_{M2})\}$ de puntos de localización existentes, poliedro convexo R

Salida: Center-punto de localización restrictivo óptimo $X^R(x_1^R | x_2^R)$ con $X^R \notin \text{int}(R)$ y valor de la center-función objetivo restrictiva $g(X^R)$

1. Paso: Determina con el algoritmo 3.4 el punto de localización óptimo X^* del center-problema de localización (sin restricciones).

2. Paso: Si $X^* \notin \text{int}(R)$, indicar $X^R := X^*$.

3. Paso: En caso contrario, determina el siguiente conjunto K de puntos, los cuales serán los candidatos:

a) para cada par de localizaciones existentes Ex_i y Ex_j determina el punto de intersección del borde de R con la mediatriz del segmento $\overline{Ex_i, Ex_j}$

b) para cada localización existente, encuentra los puntos al pie del eje radial en el área del poliedro R

4. Paso: Devolver el punto $X^R(x_1^R | x_2^R) \in K$, de tal forma que $r := g(X^R)$ es mínimo y el círculo con centro en X^R y radio r contenga todos los puntos de localización existentes del conjunto Ex .

En lugar de resolver el center-problema de localización en forma gráfica, también podemos encontrar el punto de localización óptimo X^* con ayuda de la geometría analítica. Esto ha sido desarrollado en el CD adjunto.

Discusión 3.4:

- ¿Qué sucede cuando la región prohibida se compone de varios poliedros independientes?
- ¿Es posible describir el algoritmo 3.6 en una forma más eficiente? Por ejemplo, ¿son todos los candidatos que se encuentran en el conjunto K obtenido a partir del algoritmo 3.6 verdaderamente necesarios o es posible elegir un conjunto más pequeño de candidatos? ¿Es posible que la determinación del mejor punto de K se lleve a cabo más rápida y directamente en el tercer paso?

3.7 Problemas de localización con distancia rectangular

Como en la sección 3.3 analizaremos median-problemas de localización de la forma

$$\min_{X \text{ punto en el plano}} f(X) := \sum_{m=1}^M d(Ex_m, X) ,$$

en donde para este capítulo la distancia entre los puntos de localización existentes Ex_m y el aún desconocido nuevo punto de localización X viene dada por la **distancia rectangular**

$$d(Ex_m, X) = l_1(Ex_m, X) := |a_{m1} - x_1| + |a_{m2} - x_2|$$

(ver diagrama 3.18). De la misma forma como en la sección 3.3.2, es posible descomponer la median-función objetivo de la siguiente manera

$$f(X) = \sum_{m=1}^M d(Ex_m, X) = \sum_{m=1}^M l_1(Ex_m, X) = \sum_{m=1}^M (|a_{m1} - x_1| + |a_{m2} - x_2|) = \underbrace{\sum_{m=1}^M |a_{m1} - x_1|}_{=: f_1(x_1)} + \underbrace{\sum_{m=1}^M |a_{m2} - x_2|}_{=: f_2(x_2)}$$

y concluir que $f(X)$ obtendrá su valor mínimo, cuando tanto $f_1(x_1)$ como $f_2(x_2)$ obtengan su valor mínimo. Por desgracia, es aquí también donde las similitudes con el problema de distancias euclídeas cuadráticas termina, puesto tanto las funciones $f_1(x_1)$ como $f_2(x_2)$ no son diferenciables.

Ejemplo 3.9:

Para $Ex_1(1 | 1)$, $Ex_2(1 | 4)$, $Ex_3(2 | 1)$, $Ex_4(4 | 1)$, $Ex_5(4 | 4)$ el valor de $f_1(x_1)$ viene dado por:

$$f_1(x_1) = |1 - x_1| + |1 - x_1| + |2 - x_1| + |4 - x_1| + |4 - x_1| = 2 |1 - x_1| + |2 - x_1| + 2 |4 - x_1|$$

Debido al valor absoluto, es necesario ahora llevar a cabo un análisis por casos y es así como se obtienen funciones definidas por partes, cuyos dominios son los intervalos en los cuales el argumento, es decir el "contenido" de todos los valores absolutos, no cambian de signo. Estas funciones se unen entre sí por medio de un "pico", por lo que si bien son continuas, no son diferenciables en todos los puntos.

Análisis por casos para $f_1(x_1)$:

- | | | |
|---------|-----------------------|---|
| 1. Caso | $x_1 \leq 1$: | $f_1(x_1) = 2(1 - x_1) + (2 - x_1) + 2(4 - x_1) = 12 - 5x_1$ |
| 2. Caso | $1 \leq x_1 \leq 2$: | $f_1(x_1) = 2(x_1 - 1) + (2 - x_1) + 2(4 - x_1) = 8 - 1x_1$ |
| 3. Caso | $2 \leq x_1 \leq 4$: | $f_1(x_1) = 2(x_1 - 1) + (x_1 - 2) + 2(4 - x_1) = 4 + 1x_1$ |
| 4. Caso | $x_1 \geq 4$: | $f_1(x_1) = 2(x_1 - 1) + (x_1 - 2) + 2(x_1 - 4) = -12 + 5x_1$ |

(→Ej.3.12)

Al representar $f_1(x_1)$, es posible hacer las siguientes observaciones (ver diagrama 3.21):

- $f_1(x_1)$ es lineal a trozos, lo que quiere decir que la gráfica es en los diferentes intervalos un segmento (las partes de la función $f_1(x_1)$ son de la forma: $f(x_1) = b + cx_1$, es decir que son rectas con pendiente c).
- f_1 tiene "picos" en los cuales la función es continua pero no es diferenciable.
- el mínimo de la función se encuentra en el pico en el que existe un cambio de signos en la pendiente de los segmentos.
- la pre-imagen del punto de localización óptimo es $x_1 = 2$.

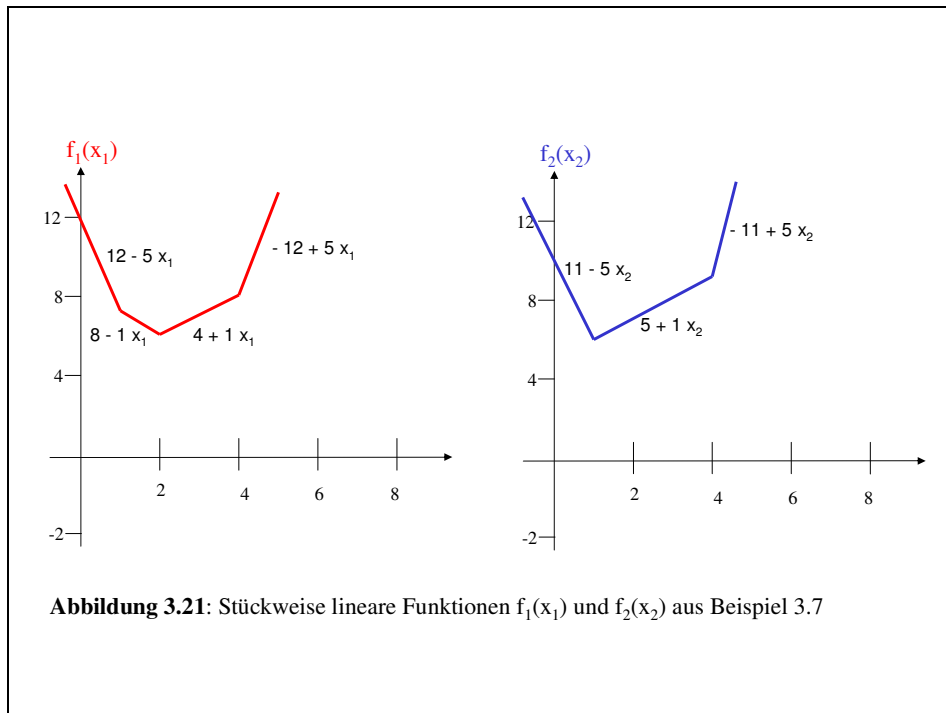


Abbildung 3.21: Stückweise lineare Funktionen $f_1(x_1)$ und $f_2(x_2)$ aus Beispiel 3.7

Diagrama 3.21 funciones lineales por partes $f_1(x_1)$ y $f_2(x_2)$ del ejemplo 3.7.

De manera análoga, se obtiene para la función $f_2(x_2)$:

$$f_2(x_2) = |1 - x_2| + |4 - x_2| + |1 - x_2| + |1 - x_2| + |4 - x_2| = 3|1 - x_2| + 2|4 - x_2|$$

1. Caso $x_2 \leq 1$: $f_2(x_2) = 3(1 - x_2) + 2(4 - x_2) = 11 - 5x_2$

2. Caso $1 \leq x_2 \leq 4$: $f_2(x_2) = 3(x_2 - 1) + 2(4 - x_2) = 5 + 1x_2$

3. Caso $x_2 \geq 4$: $f_2(x_2) = 3(x_2 - 1) + 2(x_2 - 4) = -11 + 5x_2$

De la gráfica de $f_2(x_2)$ en el diagrama 3.21 es posible obtener la siguiente información:

- $f_2(x_2)$ es lineal por partes, debido a que la gráfica de la función es en su respectivo intervalo un segmento.
- f_2 tiene "picos" en donde la función es continua pero no diferenciable.
- al menos un mínimo se encuentra en estos picos.
- la pre-imagen del punto de localización óptimo es $x_2 = 1$.

Ambos mínimos, es decir $x_1 = 2$ y $x_2 = 1$ de las funciones $f_1(x_1)$ y $f_2(x_2)$ respectivamente dan lugar al median-punto de localización óptimo $X^*(2 | 1)$.

(→Ej.3.13)

Para resolver median-problemas de localización con distancia rectangular como norma general, es necesario encontrar el mínimo de la función $h(x) := \sum_{m=1}^Q v_m |a_m - x|$. En el ejemplo 3.9 hicimos esto para las funciones $h = f_1$ y $h = f_2$ (en la que tuvimos que recurrir a índices adicionales, para poder diferenciar a una de las funciones de la otra). Los coeficientes v_m se originan debido a que diferentes puntos de localización existentes pueden tener la misma coordenada en x o en y . Q es la cantidad de diferentes valores de coordenadas (en el ejemplo 3.9, $Q = 3$ para $h = f_1$ y $Q = 2$ para $h = f_2$). Aunque la función $h(x)$ no es diferenciable, es bastante sencillo encontrar un mínimo: se debe encontrar el pico en el que se dé un cambio de signos en el valor de la pendiente de los segmentos de la función lineal por partes.

Para poder hacer esto, asumiremos que los valores a_m están ordenados de tal forma que $a_1 < a_2 < \dots < a_Q$ se cumple. Adicionalmente, asignaremos lo siguiente: $a_0 = -\infty$ y $a_{Q+1} = +\infty$. A continuación observaremos para un valor de q con $0 \leq q \leq Q + 1$ el comportamiento de la función $h(x)$ en el intervalo $[a_q, a_{q+1}]$ ³. Para $x \in [a_q, a_{q+1}]$ es decir $a_q \leq x \leq a_{q+1}$, se tiene que si $m > q + 1$ entonces: $a_m > a_{q+1} \geq x$ y así se cumple $|a_m - x| = (a_m - x)$, mientras que en el caso de $m \leq q$ se tiene que $|a_m - x| = (x - a_m)$. Por lo que a partir de la definición de $h(x)$ para $x \in [a_q, a_{q+1}]$, es posible resolver las barras de valor absoluto de la siguiente forma

$$h(x) = \sum_{m=1}^q v_m (x - a_m) + \sum_{m=q+1}^Q v_m (a_m - x) = \left(\sum_{m=1}^q v_m - \sum_{m=q+1}^Q v_m \right) x + \left(\sum_{m=q+1}^Q v_m a_m - \sum_{m=1}^q v_m a_m \right).$$

Es así como $h(x)$, tal y como se mostró en el ejemplo 3.9, posee en el intervalo $[a_q, a_{q+1}]$ una función lineal con pendiente c_q . El pico en el cual ocurre por lo tanto el cambio de signos en la pendiente de los segmentos de esta función lineal por partes $h(x)$, es fácil de determinar

mediante los valores $c_q = \sum_{m=1}^q v_m - \sum_{m=q+1}^Q v_m$ para $q = 0, \dots, Q$ (se ha de tener en cuenta que un

sumatorio sobre un conjunto de índices vacíos es cero, es decir:

$$c_0 = \sum_{m=1}^0 v_m - \sum_{m=0+1}^Q v_m = 0 - \sum_{m=1}^Q v_m < 0 \text{ y } c_Q = \sum_{m=1}^Q v_m - \sum_{m=Q+1}^Q v_m = \sum_{m=1}^Q v_m - 0 > 0$$

Podemos concluir viendo que la sucesión de los valores de c_q es monótonamente creciente, de tal forma que existe un valor de q para el cual c_q es por primera vez no negativo. Para este valor de q es por lo tanto $x = a_q$ el mínimo de la función $h(x)$.

Ejemplo 3.10:

1. Para la función $|1 - x_I| + |1 - x_I| + |2 - x_I| + |4 - x_I| + |4 - x_I|$ es $Q = 3$ la cantidad de diferentes valores numéricos que ocasionan un cambio de signos dentro de las barras de valor absoluto. De esta forma tenemos que $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ y $a_3 = 4$. Luego se tiene que $v_1 = 2$, $v_2 = 1$ y $v_3 = 2$, de tal forma que $h(x) = 2|1 - x_I| + |2 - x_I| + 2|4 - x_I|$. Calculamos a continuación $c_1 = v_1 - (v_2 + v_3) = 2 - (1 + 2) = -1 < 0$ y $c_2 = (v_1 + v_2) - v_3 = (2 + 1) - 2 = 1 > 0$, en donde observamos que c_q es para $q = 2$ por primera vez no negativo y por lo tanto obtenemos que $x = a_2 = 2$ es un mínimo de $h(x)$. (Esta función ya la habíamos presentado como f_1 en el ejemplo 3.9; ver diagrama 3.21.)

2. Dado $|2 - x_I| + |4 - x_I| + |2 - x_I| + |8 - x_I| + |6 - x_I| + |8 - x_I|$, se tiene que $Q = 4$ y es posible describir la función $h(x) = 2|2 - x_I| + 1|4 - x_I| + 1|6 - x_I| + 2|8 - x_I|$. La siguiente tabla resume toda la información, de la cual podemos encontrar el mínimo de la función.

³ Aquí hacemos uso, de una forma algo imprecisa, la descripción de intervalos cerrados, a pesar que para $q = 0$ y $q = Q + 1$ el intervalo es abierto a la izquierda y a la derecha respectivamente.

	$q = 1$	$q = 2$	$q = 3$	$q = 4$
$a_q =$	2	4	6	8
$v_q =$	2	1	1	2
$c_q =$	-2	0	2	6

(→Ej.3.14-15)

Ejercicios de repaso

Ej.3.12

a) Describa con sus propias palabras la forma en la que fue determinado cada intervalo para el análisis por casos. (Por ejemplo, indicar el motivo por el cual $1 \leq x_1 \leq 1,3$ no es un caso particular).

b) Determine para cada valor absoluto de la función $f_1(x_1)$ el signo de cada argumento en cada uno de los casos del análisis por casos.

Ej.3.13 Dada la función $f(x) = |3 - x| + |6 - x| + 4|3 - x| + |2 - x|$, ¿en dónde tiene ésta su valor mínimo? Resuelva este ejercicio sin representar la función y revise su respuesta al final, representando la función $f(x)$ y comparando sus resultados.

Ej.3.14 Compruebe su resultado del Ej. 3.13, observando el comportamiento de c_q .

Ej.3.15 Encuentre el median-punto de localización óptimo con distancia rectangular para los siguientes datos:

a) $Ex := \{Ex_1(1 | -2), Ex_2(2 | 4), Ex_3(-6 | 1)\}$.

b) $Ex := \{Ex_1(2 | 3), Ex_2(6 | 6), Ex_3(6 | 13), Ex_4(8 | 0)\}$.

c) $Ex := \{Ex_1(11 | -5), Ex_2(22 | 7), Ex_3(-12 | -21), Ex_4(-7 | 7), Ex_5(9 | 7), Ex_6(19 | 83)\}$.

Apéndice: Información adicional

Tal y como indicamos en la introducción de nuestro libro, los modelos de teoría de localización presentados aquí son significativos y pueden ser aplicados para la resolución de problemas prácticos. No obstante, frecuentemente es necesario modificarlos un tanto para poder mostrar y representar los problemas en la economía de una forma más real.

¿Qué es lo que sucede cuando por ejemplo aplicamos restricciones, tal y como lo mencionamos en la sección 3.6 de center-problemas, pero ahora para median-problemas? ¿Es posible, como en las secciones 3.3.2 y 3.7, resolver median-problemas, pero haciendo uso de una distancia euclídea? ¿Tiene sentido contar no solo con una función objetivo, sino considerar varias a la vez?

Éstas y muchas otras preguntas se pueden resolver con métodos que por lo general se salen del marco definido por la matemática escolar, los cuales sin embargo tienen sus bases en las metodologías y resultados que fueron presentados en este capítulo.

En cuanto a referencias bibliográficas sobre estos temas, se recomienda en especial el libro "Teoría de localización: un tema de la matemática industrial en la escuela" ("Standortplanung - ein Thema der Wirtschaftsmathematik im Unterricht"), publicado por el centro pedagógico Rheinland-Pfalz, Bad Kreuznach en PZ-Informationen 23/2000. En él se puede leer además de una introducción a la teoría de localización, el desarrollo de cuatro ejemplos prácticos que

pueden ser estudiados como apartados temáticos en clase. Estos ejemplos tratan sobre la planificación de una estación de bomberos, la entrega de equipaje en un aeropuerto, la planificación de un parque de recreo para niños y la "medición alrededor de la esquina".

Un libro de texto en alemán sobre teoría de localización fue publicado en 1995 por la editorial Vieweg y se titula "Métodos matemáticos de la teoría de localización planar" ("Mathematische Verfahren der Planaren Standortplanung"), escrito por Horst W. Hamacher. Una introducción detallada es posible encontrarla en internet en la pagina de Stefan Nickel de la Universidad de Saarbrücken (<http://www.wiwi.uni-sb.de/lst/ufo/main.html>). Gracias a su amable autorización, fragmentos de dicho texto fueron utilizados para la redacción de la sección 3.5.

Si uno desea calcular ejemplos en computadora de problemas de localización, es posible hacer uso de la biblioteca de programación LoLa (Library of Location Algorithms), la cual puede ser descargada gratuitamente en <http://www.mathematik.uni-kl.de/~lola/>.